SPE 2009: DISPENSE ED ESERCIZI

MARCO MANETTI

Sommario. Queste note sono l'evoluzione delle dispense per il corso di eccellenza 2009, Sapienza Università di Roma. Qui il lettore interessato potrà trovare una dimostrazione della formula di Stirling, della formula di Baker-Campbell-Hausdorff, alcune proprietà delle serie di potenze, dei numeri di Stirling, Fibonacci, Bernoulli ed altre interessanti divagazioni matematiche. È **fondamentale** svolgere gli esercizi!

Rivolto a studenti del secondo anno del corso di laurea in matematica.

1. Parentesi sui coefficienti binomiali

Per n, k interi non negativi, i coefficicnti binomiali $\binom{n}{k}$ sono definiti tramite l'uguaglianza di polinomi:

$$(1+x)^n = \sum_{k\geq 0} \binom{n}{k} x^k \,.$$

Osserviamo immediatamente che $\binom{n}{k} = 0$ se $k > n$ e $\binom{n}{0} = 1$. Se $n > 0$, allora derivando rispetto ad x ambo i membri e dividendo per n si ottiene

$$\sum_{k>0} \binom{n-1}{k-1} x^{k-1} = \sum_{k\geq 0} \frac{k}{n} \binom{n}{k} x^{k-1}$$

ed eguagliando i coefficienti

$$\binom{n-1}{k-1} = \frac{k}{n}\binom{n}{k} \qquad \text{per } k>0.$$

Usando questa formula si dimostra immediatamente per induzione su k che

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Scrivendo invece $(1+x)^n = (1+x)^{n-1} + x(1+x)^{n-1}$ si ricava invece la formula

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}.$$

Esercizio 1. Se t è una variabile e d è un intero non negativo, si definsce il polinomio a coefficienti razionali

$$\binom{t}{0} = 1, \qquad \binom{t}{d} = \frac{1}{d!}\prod_{i=0}^{d-1}(t-i) \in \mathbb{Q}[t] \text{ per } d>0.$$

Dimostrare che:

(1) Il polinomio $\binom{t}{d}$ ha grado d ed ha come radici i numeri interi compresi tra 0 e $d-1$.

(2) Valgono le formule

$$\binom{t}{d} = \frac{t}{d}\binom{t-1}{d-1}, \qquad \binom{t+1}{d} - \binom{t}{d} = \binom{t}{d-1}.$$

Esercizio 2. Un polinomio $p(t) \in \mathbb{Q}[t]$ si dice un **polinomio numerico** se $p(n) \in \mathbb{Z}$ per ogni intero $n >> 0$. Provare che:

(1) I polinomi $\binom{t}{d}$, con $d \geq 0$, sono numerici.

Date: Prima versione Novembre 2009. Ultima revisione Dicembre 2020.

(2) Se $p(t)$ è un polinomio numerico, allora $p(n) \in \mathbb{Z}$ per ogni $n \in \mathbb{Z}$ (Sugg.: il polinomio $q(t) = p(t+1) - p(t)$ è numerico.)
(3) Ogni polinomio numerico si scrive in modo unico come una combinazione lineare a coefficienti interi dei polinomi $\binom{t}{d}$, con $d \geq 0$.
(4) Con la relazione di ordine $p \geq q$ *se e solo se* $p(n) \geq q(n)$ *per* $n >> 0$, i polinomi numerici sono un insieme totalmente ordinato.

2. Forward difference

Indichiamo con V lo spazio vettoriale (di dimensione infinita) di tutte le applicazioni $a \colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Ogni elemento di V non è altro che una successione $a = \{a_0, a_1, \dots\}$ di numeri reali. Definiamo gli operatori lineari di *shift* $S \colon V \to V$ e *forward difference* $\Delta \colon V \to V$ nel modo seguente:

$$Sa_i = (Sa)_i = a_{i+1}, \qquad \Delta a_i = (\Delta a)_i = a_{i+1} - a_i \,.$$

Dunque $S = I + \Delta$, e per ogni $i > 0$ si ha

$$S^i a_j = a_{i+j}, \qquad \Delta^i a_j = \Delta\Delta^{i-1} a_j = \Delta^{i-1} a_{j+1} - \Delta^{i-1} a_j \,.$$

È utile riscrivere la seconda uguaglianza nella forma

$$\Delta^{i-1} a_{j+1} = \Delta^i a_j + \Delta^{i-1} a_j \,. \tag{1}$$

Lemma 2.1. *Per ogni successione $a_0, a_1, \dots$ ed ogni $n \geq 0$ valgono le formule:*

$$\Delta^n a_0 = \sum_{i=0}^n (-1)^{n-i} \binom{n}{i} a_i, \qquad a_n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \Delta^i a_0 \,.$$

Dimostrazione. Nell'algebra associativa degli endomorfismi di V si hanno gli sviluppi di Newton:

$$\Delta^n = (S - I)^n = \sum_{i=0}^n (-1)^{n-i} \binom{n}{i} S^i \,,$$

$$S^n = (I + \Delta)^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \Delta^i \,.$$

Di conseguenza

$$\Delta^n a_0 = \sum_{i=0}^n (-1)^{n-i} \binom{n}{i} S^i a_0 = \sum_{i=0}^n (-1)^{n-i} \binom{n}{i} a_i,$$
$$a_n = S^n a_0 = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \Delta^i a_0 \,.$$

□

Come ovvia generalizzazione del Lemma 2.1 abbiamo che per ogni successione $a_0, a_1, \dots$ ed ogni $s, n \geq 0$ valgono le formule:

$$\Delta^n a_s = \sum_{i=0}^n (-1)^{n-i} \binom{n}{i} a_{s+i}, \qquad a_{n+s} = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \Delta^i a_s \tag{2}$$

e quindi che la $n+1$-upla $a_s, \dots, a_{n+s}$ è univocamente determinata dalla $n+1$-upla $a_s = \Delta^0 a_s, \Delta a_s, \dots, \Delta^n a_s$ e viceversa.

Esercizio 3. Mettendo assieme le due formule del Lemma 2.1 ricaviamo che per ogni $n \geq 0$ vale

$$a_n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \sum_{j=0}^i (-1)^{i-j} \binom{i}{j} a_j$$

per ogni successione $a_0, \dots$, il che equivale alle identità:

$$\sum_{i=s}^n (-1)^i \binom{n}{i} \binom{i}{s} = 0 \qquad \text{per ogni} \quad s < n \,.$$

Dedurre le medesime identità dallo sviluppo di Newton di $(1 + (t-1))^n$.

3. La formula di Wallis

Notazione. Se a_n, b_n sono due successioni di numeri reali positivi, scriveremo $a_n \sim b_n$ se vale

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1.$$

Teorema 3.1 (John Wallis, 1656). *Vale la formula*

$$\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{(n!)^2} \sim \frac{2^{2n}}{\sqrt{\pi n}} \ .$$

Dimostrazione. Per ogni intero $n \geq 0$ consideriamo l'integrale definito

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n(x)dx \ .$$

Si ha $I_0 = \pi/2$, $I_1 = 1$, mentre i valori I_n, $n \geq 2$, possono essere calcolati ricorsivamente mediante la formula di integrazione par parti: infatti

$$\begin{aligned} I_n &= \int_0^{\pi/2} \sin^n(x)dx = \int_0^{\pi/2} \sin(x)\sin^{n-1}(x)dx \\ &= \left[-\cos(x)\sin^{n-1}(x)\right]_0^{\pi/2} + (n-1)\int_0^{\pi/2} \cos^2(x)\sin^{n-2}(x)dx \\ &= (n-1)\int_0^{\pi/2}(1-\sin^2(x))\sin^{n-2}(x)dx = (n-1)(I_{n-2} - I_n) \end{aligned}$$

da cui segue la formula

$$I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2} \ . \tag{3}$$

Essendo chiaramente $0 < I_n \leq I_{n-1}$ per ogni n si ha che

$$\frac{n-1}{n} = \frac{I_n}{I_{n-2}} \leq \frac{I_n}{I_{n-1}} \leq 1$$

e quindi il limite della successione I_{n+1}/I_n è uguale ad 1. Di conseguenza

$$\lim_{n\to\infty} \frac{I_{2n+1}}{I_{2n}} = 1 \ .$$

Per la formula (3)

$$\frac{I_{2n+1}}{I_{2n}} = \frac{\dfrac{2n}{2n+1} I_{2n-1}}{\dfrac{2n-1}{2n} I_{2n-2}} = \frac{I_{2n-1}}{I_{2n-2}} \frac{(2n)^2}{(2n-1)(2n+1)}$$

e quindi

$$\begin{aligned} \frac{I_{2n+1}}{I_{2n}} &= \frac{I_{2n-1}}{I_{2n-2}} \frac{(2n)^2}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{I_{2n-3}}{I_{2n-4}} \frac{(2n-2)^2(2n)^2}{(2n-3)(2n-1)^2(2n+1)} \\ &= \frac{I_1}{I_0} \frac{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2 \cdots (2n-2)^2(2n)^2}{1 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdots (2n-3)(2n-1)^2(2n+1)} \\ &= \frac{I_1}{I_0} \frac{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2 \cdots (2n-2)^2(2n)^2}{1 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdots (2n-3)(2n-1)^2 \, n} \frac{n}{2n+1} \ . \end{aligned}$$

Passando al limite la relazione

$$\frac{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2 \cdots (2n-2)^2(2n)^2}{1 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdots (2n-3)(2n-1)^2 \, n} \frac{n}{2n+1} = \frac{I_0}{I_1} \frac{I_{2n+1}}{I_{2n}}$$

si ottiene

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2 \cdots (2n-2)^2(2n)^2}{1 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdots (2n-3)^2(2n-1)^2 n} \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2n+1} = \frac{I_0}{I_1} = \frac{\pi}{2}$$

e di conseguenza

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2 \cdots (2n-2)^2(2n)^2}{1^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdots (2n-3)^2(2n-1)^2 \, n} = \pi \ , \tag{4}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n-2)(2n)}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-3)(2n-1)\,\sqrt{n}}=\sqrt{\pi}\,. \tag{5}$$

Moltiplicando numeratore e denominatore di (5) per $2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n-2)(2n)=2^n n!$ si ottiene

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(2^n n!)^2}{(2n)!\sqrt{n}}=\sqrt{\pi}\iff\lim_{n\to\infty}\frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n)!\sqrt{\pi n}}=1\,,$$

che equivale a

$$\frac{2^{2n}}{\sqrt{\pi n}}\sim\frac{(2n)!}{(n!)^2}=\binom{2n}{n}.$$

□

Osservazione 3.2. In letteratura, spesso la formula di Wallis si enuncia sotto forma di produttoria infinita:

$$\frac{\pi}{2}=\prod_{n=1}^{\infty}\frac{2n}{(2n-1)(2n+1)}:=\lim_{n\to\infty}\frac{2^2\cdot 4^2\cdot 6^2\cdots(2n-2)^2(2n)^2}{1\cdot 3^2\cdot 5^2\cdots(2n-3)^2(2n-1)^2(2n+1)}\,.$$

Esercizio 4. In questo esercizio proponiamo una dimostrazione dell'eguaglianza

$$\int_0^{+\infty}e^{-x^2}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

che utilizza la formula di Wallis. Per ogni intero $n\ge 0$ indichiamo

$$G_n=\int_0^{+\infty}x^n e^{-x^2}dx\,.$$

(1) Provare che $G_1=1/2$.
(2) Usare l'integrazione per parti per dimostrare che per ogni $n\ge 0$ vale

$$G_{n+2}=\frac{n+1}{2}G_n.$$

(3) Provare che

$$G_{2k+1}=\frac{k!}{2},\qquad G_{2k+2}=\frac{2k+1}{2^{2k+1}}\frac{(2k)!}{k!}G_0\,.$$

(4) Provare che per ogni numero reale t ed ogni $n\ge 0$ vale

$$\int_0^{+\infty}(t+x)^2x^ne^{-x^2}dx=t^2G_n+2tG_{n+1}+G_{n+2}\ge 0$$

e dedurre che $G_{n+1}^2\le G_nG_{n+2}$.
(5) Usare le diseguaglianze

$$G_{2k}^2\le G_{2k-1}G_{2k+1},\qquad G_{2k+1}^2\le G_{2k}G_{2k+2}$$

per dedurre che

$$G_{2k}^2\le G_{2k-1}G_{2k+1}=\frac{(k-1)!k!}{4},\qquad \frac{(k!)^2}{4}\le\frac{2k+1}{2}G_{2k}^2,$$

$$G_{2k}^2\sim\frac{k!(k-1)!}{4},\qquad G_{2k+2}\sim\frac{\sqrt{k+1}}{2}k!\,.$$

(6) Usare la formula di Wallis per calcolare G_0.

Esercizio 5. (1) Provare che la successione $a_n=\binom{2n}{n}$ soddisfa l'equazione ricorsiva

$$a_{n+1}=\frac{4n+2}{n+1}a_n,\qquad a_0=1\,.$$

(2) Provare che la serie

$$f(t)=\sum_{n=0}^{+\infty}\binom{2n}{n}t^n$$

converge assolutamente nell'intervallo $-1/4<t<1/4$.

(3) Provare che vale $(1-4t)f'(t) = 2f(t)$, $f(0) = 1$ e dedurre che

$$\frac{1}{\sqrt{1-4t}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{2n}{n} t^n.$$

(4) Provare che

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{2k}{k} \binom{2n-2k}{n-k} = 4^n.$$

(5) Sia

$$c_0 = 1, \qquad c_n = \prod_{i=1}^{n} \frac{n+1/2}{n+1}.$$

Provare che

$$c_n \sim \frac{1}{\sqrt{\pi n}}, \qquad \frac{1}{\sqrt{1-t}} = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n t^n.$$

Esercizio 6. Sapendo che

$$\frac{1}{\sqrt{1-4t}} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{2n}{n} t^n = 1 + 2t + 6t^2 + \cdots$$

dimostrare che

$$\frac{1-\sqrt{1-4t}}{2t} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n} t^n = 1 + t + 2t^2 + \cdots$$

(Suggerimento: derivare le funzioni $\dfrac{1-\sqrt{1-4t}}{2}$, $\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{1}{n+1} \binom{2n}{n} t^{n+1}$.)

4. Permutazioni senza punti fissi

Indichiamo con d_n, $n > 0$, il numero di permutazioni σ di $\{1, \ldots, n\}$ senza punti fissi, ossia tali che $\sigma(i) \neq i$ per ogni i. Vogliamo dimostrare che

$$\lim_{n \to \infty} \frac{n!}{d_n} = e.$$

Poniamo per convenzione $d_0 = 1$. Una permutazione di $\{1, \ldots, n\}$ è univocamente determinata dal sottoinsieme dei suoi punti fissi e da una permutazione senza punti fissi del complementare. Ciò significa che per ogni k con $0 \leq k \leq n$ il numero di permutazioni con k punti fissi è uguale a

$$D_n(k) = \binom{n}{k} d_{n-k}.$$

Sommando per $k = 0, \ldots, n$ si ottiene quindi

$$n! = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{n-k} d_k$$

e dividendo per $n!$

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{d_k}{k!} \frac{1}{(n-k)!} = 1.$$

Consideriamo la funzione

$$f(t) = \sum_{n \geq 0} \frac{d_n}{n!} t^n\ ,$$

allora

$$f(t)e^t = \left(\sum_{n \geq 0} \frac{d_n}{n!} t^n \right) \left(\sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} t^n \right) = \sum_{n \geq 0} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{d_k}{k!} \frac{1}{(n-k)!} \right) t^n = \sum_{n \geq 0} t^n = \frac{1}{1-t}\,,$$

da cui

$$f(t) = \frac{e^{-t}}{1-t} = \sum_{n \geq 0} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} \right) t^n.$$

e quindi

$$\frac{d_n}{n!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}, \qquad \lim_n \frac{d_n}{n!} = \sum_{k\ge 0} \frac{(-1)^k}{k!} = e^{-1}.$$

Esercizio 7. Nelle notazioni precedenti mostrare che

$$\sum_{n,k} \frac{D_n(k)}{n!} x^n y^k = \frac{e^{-x}}{1-x} e^{xy}.$$

Per ogni numero reale $r > 0$ calcolare il limite per $n \to \infty$ di

$$c_n = \sum_k \frac{D_n(k)}{n!} r^k.$$

Esercizio 8. Trovare una formula per i termini della successione a_n definita dalla relazione ricorsiva

$$(n+1)a_{n+1} = 3a_n + \frac{1}{n!}, \qquad n \ge 0,\ a_0 = 1.$$

(Sugg.: provare che la funzione generatrice $f(t) = \sum a_n t^n$ è la soluzione del problema di Cauchy

$$f' = 3f + e^t, \qquad f(0) = 1,$$

e quindi che $f(t) = (3e^{3t} - e^t)/2$.)

5. La formula di Stirling

Per formula di Stirling si intende la relazione

$$n! \sim \sqrt{2\pi n}\, \frac{n^n}{e^n} \tag{6}$$

e più in generale qualsiasi approssimazione del fattoriale di un numero intero con funzioni elementari.

In queste note dimostreremo il seguente teorema, dal quale la formula (6) segue banalmente ed immediatamente.

Teorema 5.1 (Cesàro, 1922)**.** *Per ogni intero positivo n valgono le disuguaglianze*

$$\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n e^{\frac{1}{12n+\frac{6}{10n+5}}} \le n! \le \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n e^{\frac{1}{12n}}.$$

Ovviamente per dimostrare la formula di Stirling sono sufficienti stime meno fini rispetto al Teorema 5.1, come ad esempio:

$$\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n \le n! \le \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n e^{\frac{1}{12n}}\ . \tag{7}$$

Per motivi esclusivamente didattici dimostreremo quindi prima le disuguaglianze (7) e la formula di Stirling; successivamente, con dei conteggi aggiuntivi, dimostreremo il Teorema 5.1. Più avanti, dopo aver introdotto i numeri di Bernoulli B_n, dimostreremo alla maniera dei fisici (ossia ignorando questioni di convergenza) la formula

$$n! = \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n \exp\left(\sum_{d\ge 1} \frac{B_{2d}}{(4d^2-2d)n^{2d-1}}\right) = \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n e^{\frac{1}{12n}-\frac{1}{360n^3}+\frac{1}{1260n^5}+\cdots}.$$

Introduciamo le seguenti successioni di numeri reali:

$$d_n = \log(n!) - \left(n+\frac{1}{2}\right)\log(n) + n, \qquad c_n = d_n - \frac{1}{12n}, \quad n > 0\,. \tag{8}$$

Lemma 5.2. *Nelle notazioni (8), per ogni $n > 0$ si ha*

$$c_n \le c_{n+1} \le d_{n+1} \le d_n\,.$$

Dimostrazione. Per ogni $n > 0$ si ha

$$d_n - d_{n+1} = \left(n + \frac{1}{2}\right) \log\left(\frac{n+1}{n}\right) - 1 \,.$$

Denotando $t = (2n+1)^{-1}$ si ha $0 < t \le 1/3$ e

$$d_n - d_{n+1} = \frac{1}{2t} \log\left(\frac{1+t}{1-t}\right) - 1 = \frac{1}{2t} \left(\log(1+t) - \log(1-t)\right) - 1 \,.$$

Gli sviluppi di Taylor

$$\begin{aligned}\log(1+t) &= t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} - \frac{t^4}{4} + \cdots \\ \log(1-t) &= -t - \frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{3} - \frac{t^4}{4} + \cdots\end{aligned}$$

sono convergenti per $0 < t < 1$ e quindi

$$d_n - d_{n+1} = \frac{1}{2t}\left(2t + 2\frac{t^3}{3} + 2\frac{t^5}{5} + \cdots\right) - 1 = \frac{t^2}{3} + \frac{t^4}{5} + \frac{t^6}{7} + \cdots \ge 0 \,.$$

Inoltre

$$\begin{aligned}d_n - d_{n+1} &= \frac{t^2}{3} + \frac{t^4}{5} + \frac{t^6}{7} + \cdots \\ &\le \frac{1}{3}(t^2 + t^4 + t^6 + \cdots) = \frac{1}{3}\frac{t^2}{1-t^2} = \frac{1}{3}\frac{1}{t^{-2}-1}\end{aligned}$$

e ricordando che $t^{-1} = 2n+1$ si ha

$$d_n - d_{n+1} \le \frac{1}{3}\frac{1}{(2n+1)^2 - 1} = \frac{1}{12}\frac{1}{n^2+n} = \frac{1}{12n} - \frac{1}{12(n+1)},$$

che equivale a $c_n \le c_{n+1}$. □

Dal lemma segue in particolare che esiste il limite $d = \lim_{n\to\infty} d_n$ e che per ogni n vale

$$d_n - \frac{1}{12n} \le d \le d_n,$$

o equivalentemente che

$$d \le d_n \le d + \frac{1}{12n} \,. \tag{9}$$

Esponenziando si ottiene

$$e^d \le e^{d_n} = \frac{e^n\, n!}{n^n\sqrt{n}} \le e^d e^{\frac{1}{12n}},$$

e passando al limite per $n \to \infty$

$$n! \sim e^d\sqrt{n}\, \frac{n^n}{e^n}.$$

Immettiamo questa stima asintotica nella formula di Wallis

$$\frac{2^{2n}}{\sqrt{\pi n}} \sim \frac{(2n)!}{(n!)^2} \sim \frac{e^d\sqrt{2n}(2n/e)^{2n}}{e^{2d}n(n/e)^{2n}} = \frac{2^{2n}\sqrt{2}}{e^d\sqrt{n}}$$

otteniamo il valore $e^d = \sqrt{2\pi}$ e abbiamo dimostrato le disuguaglianze (7).

Lemma 5.3. *Nelle notazioni* (8), *per ogni* $n > 0$ *si ha*

$$d + \frac{1}{12n + \frac{6}{10n+5}} \le d_n, \qquad d = \lim d_n = \log(\sqrt{2\pi})\,.$$

Dimostrazione. Dimostriamo preliminarmente che per ogni intero positivo n vale

$$\frac{1}{2n+1} \ge \frac{5}{9}\left(\frac{3}{5}\right)^n \,. \tag{10}$$

Per $n = 1, 2$ vale il segno di uguaglianza, e dimostriamo per induzione la disuguaglianza per ogni $n > 2$ ed a tal fine basta osservare che per ogni $n \ge 1$ vale

$$\frac{2n+1}{2n+3} \ge \frac{3}{5}\,.$$

Abbiamo già dimostrato che, denotando $t = (2n+1)^{-1}$ si ha

$$d_n - d_{n+1} = \frac{1}{2t}\left(2t + 2\frac{t^3}{3} + 2\frac{t^5}{5} + \cdots\right) - 1 = \frac{t^2}{3} + \frac{t^4}{5} + \frac{t^6}{7} + \cdots,$$

per la disuguaglianza (10) si ha

$$d_n - d_{n+1} \geq \frac{5}{9}\left(\frac{3t^2}{5} + \frac{9t^4}{25} + \left(\frac{3t^2}{5}\right)^3 + \cdots\right) = \frac{1}{3}\frac{t^2}{1-\frac{3t^2}{5}} = \frac{1}{3}\frac{1}{(2n+1)^2 - \frac{3}{5}},$$

e quindi

$$\begin{aligned}
d_n - d &= \sum_{k=0}^{+\infty} d_{n+k} - d_{n+k+1}\\
&\geq \frac{1}{3}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{(2(n+k)+1)^2 - \frac{3}{5}}\\
&\quad = \frac{1}{3}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{\left(2(n+k) + \frac{1}{10n+5}\right)\left(2(n+k+1) + \frac{1}{10n+5}\right) - \frac{4k}{10n+5}}\\
&\geq \frac{1}{3}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{\left(2(n+k) + \frac{1}{10n+5}\right)\left(2(n+k+1) + \frac{1}{10n+5}\right)}\\
&\geq \frac{1}{6}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{2(n+k) + \frac{1}{10n+5}} - \frac{1}{2(n+k+1) + \frac{1}{10n+5}} = \frac{1}{12n + \frac{6}{10n+5}}.
\end{aligned}$$

□

Esponenziando le disuguaglianze del Lemma 5.3 otteniamo

$$e^d e^{\frac{1}{12n+\frac{6}{10n+5}}} \leq e^{d_n} = \frac{e^n\, n!}{n^n\sqrt{n}}$$

che, assieme all'uguaglianza $e^d = \sqrt{2\pi}$ conduce immediatamente alla dimostrazione del Teorema (5.1).

Osservazione 5.4. Siccome $(a-b)^{-1} \geq a^{-1} + ba^{-2}$ per ogni $a > b > 0$, la dimostrazione del Lemma 5.3 implica che

$$d_n - d \geq \frac{1}{12n + \frac{6}{10n+5}} + \frac{1}{3(10n+5)}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{4k}{\left(2(n+k) + \frac{1}{10n+5}\right)^2\left(2(n+k+1) + \frac{1}{10n+5}\right)^2}$$

e questo può essere usato per migliorare la stima del Teorema 5.1.

Esercizio 9. Provare che la serie

$$\sum_{n>0}\binom{3n}{n}t^n$$

converge per $0 \leq t < 4/27$ e diverge per $t = 4/27$.

Soluzione. Che il raggio di convergenza è $4/27$ segue facilmente dal criterio del rapporto. Applicando la formula di Stirling si ha

$$\binom{3n}{n} = \frac{(3n)!}{n!(2n)!} \sim \frac{\sqrt{6n\pi}3^{3n}}{\sqrt{2n\pi}\,\sqrt{4n\pi}\,2^{2n}} = \sqrt{\frac{3}{4n\pi}}\frac{27^n}{4^n}.$$

Quindi per $n >> 0$ si ha $\binom{3n}{n}\frac{4^n}{27^n} \geq \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{4n\pi}}$ e basta osservare che la serie $\sum_n \frac{1}{\sqrt{n}}$ è divergente.

Osservazione 5.5. Il fatto che il raggio di convergenza sia $4/27$ implica che la serie non convege per $t > 4/27$ ma non dice nulla di cosa succede per $t = 4/27$. Ad esempio la serie

$$\sum_{n>0}\frac{1}{n^2}\binom{3n}{n}t^n$$

ha lo stesso raggio di convergenza e converge per $t = 4/27$.

6. Numeri di Fibonacci

In risposta ad un problema pratico di coniglicoltura, Leonardo Pisano (1170-1250), detto Fibonacci, scrive nel suo Liber Abaci la successione

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377.$$

In linguaggio moderno si definisce la successione dei *numeri di Fibonacci* tramite la formula ricorsiva

$$F_0 = 0, \quad F_1 = 1, \quad F_{n+1} = F_n + F_{n-1} \quad n \geq 1.$$

Esercizio 10. Mostrare che per ogni intero positivo n si ha:

(1) $F_1 + F_2 + \cdots + F_{n-1} + F_n = F_{n+2} - 1$,
(2) $F_3 + \cdots + F_{2n-3} + F_{2n-1} = F_{2n} - 1$,
(3) $F_2 + F_4 + \cdots + F_{2n} = F_{2n+1} - 1$.

(Sugg.: induzione su n.)

Esercizio 11. Per ogni intero positivo N definiamo $z(N) = \max\{n \mid F_n \leq N\}$. Provare che $z(N - F_{z(N)}) \leq z(N) - 2$.

Esercizio 12 (Teorema di Zeckendorf)**.** Mostrare che per ogni intero positivo N esiste una unica successione $a_1, a_2, \ldots, a_n$ di interi maggiori di 1 tali che:

(1) $a_{i+1} \geq a_i + 2$ per ogni $i = 1, \ldots, n-1$,
(2) $N = F_{a_1} + F_{a_2} + \cdots + F_{a_n}$.

Esercizio 13. Mostrare che per ogni $a, n \geq 1$ vale la formula

$$F_n F_a + F_{n-1} F_{a-1} = F_{n+a-1}.$$

(Sugg.: vero per $a = 1, 2$; induzione su a.)

Esercizio 14. (1) Mostrare che F_n e F_{n+1} non hanno fattori comuni.
(2) Usare il risultato dell'Esercizio 13 per mostrare che il massimo comune divisore di F_a, F_b è uguale al massimo comune divisore di F_a, F_{a+b}.
(3) Mostrare che $MCD(F_a, F_b) = F_{MCD(a,b)}$.

Dati due numeri reali a, b, con $a \neq b$, si ha, per ogni $n > 0$ la relazione

$$\frac{a^{n+1} - b^{n+1}}{a - b} = (a+b)\frac{a^n - b^n}{a - b} - ab\frac{a^{n-1} - b^{n-1}}{a - b}.$$

Dunque, se poniamo

$$A_n = \frac{a^n - b^n}{a - b}$$

vale

$$A_0 = 0, \quad A_1 = 1, \quad A_{n+1} = (a+b)A_n - abA_{n-1}.$$

Siano

$$x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}, \qquad y = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$$

i due numeri reali tali che

$$x + y = 1, \qquad xy = -1, \qquad (1 - xt)(1 - yt) = 1 - t - t^2.$$

Allora, se poniamo

$$F_n = \frac{x^n - y^n}{x - y}.$$

si ha

$$F_0 = 0, \quad F_1 = 1, \quad F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$$

e ritroviamo la successione dei numeri di Fibonacci.

La formula precedente può essere anche essere dimostrata usando la serie generatrice dei numeri di Fibonacci:

$$F(t) = \sum_{n=0}^{\infty} F_n t^n = F_0 + F_1 t + F_2 t^2 + \cdots = t + t^2 + 2t^3 + 3t^4 + \cdots$$

Moltiplichiamo $F(t)$ per $1-t-t^2$:

$$(1-t-t^2)F(t) = (1-t-t^2)(F_0 + F_1 t + F_2 t^2 + \cdots) =$$

$$= F_0 + (F_1 - F_0)t + (F_2 - F_1 - F_0)t^2 + \cdots + (F_n - F_{n-1} - F_{n-2})t^n + \cdots = t.$$

Si ha dunque

$$F(t) = \frac{t}{1-t-t^2} = \frac{1}{x-y}\left(\frac{1}{1-xt} - \frac{1}{1-yt}\right).$$

Basta adesso osservare che

$$\frac{1}{1-xt} = 1 + xt + x^2t^2 + \cdots, \qquad \frac{1}{1-yt} = 1 + yt + y^2t^2 + \cdots$$

Usando le stessa idea si può invece considerare

$$F(t) = \frac{t}{1-t(1+t)} = \sum_{n=0}^{\infty} t^{n+1}(1+t)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{a=0}^{n}\binom{n}{a} t^{n+a+1}.$$

da cui segue la formula

$$F_{n+1} = \sum_{a\geq 0}\binom{n-a}{a}.$$

Consideriamo le due serie

$$P(t) = \sum_{n=0}^{\infty} F_{2n}t^n = F_0 + F_2 t + F_4 t^2 + \cdots$$

$$D(t) = \sum_{n=0}^{\infty} F_{2n+1}t^n = F_1 + F_3 t + F_5 t^2 + \cdots$$

Per l'Esercizio 10 si ha:

$$\frac{P(t)}{1-t} = F_0 + (F_0 + F_2)t + (F_0 + F_2 + F_4)t^2 + \cdots = D(t) - \frac{1}{1-t}.$$

$$\frac{D(t)}{1-t} = F_1 + (F_1 + F_3)t + (F_1 + F_3 + F_5)t^2 + \cdots = \frac{P(t)}{t}.$$

Da cui si ricava

$$\frac{tD(t)}{(1-t)^2} = \frac{P(t)}{1-t} = D(t) - \frac{1}{1-t}.$$

$$D(t)\left(1 - \frac{t}{(1-t)^2}\right) = \frac{1}{1-t},$$

$$D(t) = \frac{1-t}{1-3t+t^2}, \qquad P(t) = \frac{t}{1-3t+t^2}.$$

Allo stesso risultato si poteva arrivare partendo dalle uguaglianze

$$F(t) + F(-t) = 2P(t^2), \qquad F(t) - F(-t) = 2tD(t^2), \qquad F(t) = \frac{t}{1-t-t^2}.$$

Consideriamo la successione $u_0 = 0, u_1 = 1, u_2 = 2, u_3 = 5, \ldots$ definita per ricorrenza

$$u_0 = 0; \qquad u_n - 1 = \sum_{i=0}^{n}(n-i)u_i\,, \qquad \forall n \geq 1.$$

Consideriamo la serie generatrice $U(t) = u_0 + u_1 t + \cdots$. Siccome vale

$$\frac{t}{(1-t)^2} = t + 2t^2 + 3t^3 + \cdots$$

si ha

$$\frac{tU(t)}{(1-t)^2} = U(t) - \frac{t}{1-t}.$$

da cui $U(t) = tD(t)$ e quindi $u_n = F_{2n-1}$ per ogni n. Abbiamo quindi trovato che per ogni $n \geq 1$ vale

$$F_{2n+1} - 1 = \sum_{i=0}^{n}(n-i)F_{2i+1}.$$

Alternativamente, tale uguaglianza si può anche verificare facilmente per induzione su n. Infatti vale

$$F_3 - 1 = 1 = (1-0)F_1, \qquad F_5 - 1 = 4 = 2 + 2 = (2-0)F_1 + (2-1)F_3\,,$$

e per induzione, tenendo presente l'Esercizio 10,

$$\begin{aligned} F_{2n+1} - 1 &= F_{2n} + (F_{2(n-1)+1} - 1) \\ &= (F_1 + F_3 + \cdots + F_{2n-1}) + \sum_{i=0}^{n-1}(n-1-i)F_{2i+1} \\ &= \sum_{i=0}^{n}(n-i)F_{2i+1}. \end{aligned}$$

Esercizio 15. Si consideri la successione a_n:

$$a_0 = 0, \quad a_1 = 1, \quad a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2}\,.$$

Calcolare il valore della serie

$$\sum_{n\geq 0} \frac{a_n}{3^n}\,.$$

Soluzione. Consideriamo la funzione generatrice $A(t) = \sum_{n\geq 0} a_n t^n$. Allora

$$A(t) - tA(t) - 2t^2A(t) = a_1 t + \sum_{n\geq 2}(a_n - a_{n-1} - 2a_{n-2})t^n = t$$

e quindi come serie formale

$$A(t) = \frac{t}{1-t-2t^2} = \frac{t}{(1+t)(1-2t)} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{1-2t} - \frac{1}{1+t}\right).$$

Dunque il raggio di convergenza della serie è $1/2$ e per ogni $r \in (-1/2, 1/2)$ si ha

$$\sum a_n r^n = \frac{r}{1-r-2r^2}\,.$$

In particolare

$$\sum \frac{a_n}{3^n} = \frac{1/3}{1-1/3-2/9} = 3/4\,.$$

Esercizio 16. Si consideri la successione $a_0 = 0$, $a_1 = 1$, $a_n = -a_{n-1} + 6a_{n-2}$. Studiare la convergenza della serie $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{a_n}{e^n}$.

7. Sviluppi in serie notevoli

Elenchiamo alcuni sviluppi in serie più o meno noti:

- $\displaystyle e^t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!}$,
- $\displaystyle \log(1+t) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{t^n}{n} = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} - \cdots$,
- $\displaystyle \frac{1}{1-t} = \sum_{n=0}^{\infty} t^n$,
- $\displaystyle \frac{t}{(1-t)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} nt^n$,
- $\displaystyle \frac{1}{(1-t)^{k+1}} = \sum_{n=0}^{\infty}\binom{n+k}{k}t^n$
- $\displaystyle \tan^{-1} t = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{t^{2n+1}}{2n+1}$,

- $\dfrac{1}{\sqrt{1-4t}} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \binom{2n}{n} t^n = 1 + 2t + 6t^2 + 20t^3 + 70t^4 + 252t^5 + 924t^6 + 3432t^7 + \cdots$
- $\dfrac{1-\sqrt{1-4t}}{2t} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n} t^n = 1 + t + 2t^2 + 5t^3 + 14t^4 + 42t^5 + 132t^6 + \cdots$
- $\dfrac{1}{\sqrt{1-4t}}\left(\dfrac{1-\sqrt{1-4t}}{2t}\right)^k = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \binom{2n+k}{n} t^n$

Se $z \in \mathbb{C}$ è un qualunque numero complesso e $d \in \mathbb{N}$ si pone per definizione

$$\binom{z}{d} = \frac{1}{d!}\prod_{i=0}^{d-1}(z-i) \in \mathbb{C}.$$

Se z è un intero non negativo tale definizione coincide con quella combinatoria. Si dimostra subito che

$$\binom{z}{d} = (-1)^d \binom{d-1-z}{d}.$$

Segue dalla formula di Taylor che

- $\sqrt{1+t} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \binom{1/2}{n} t^n = 1 + \frac{t}{2} - \frac{t^2}{8} + \frac{t^3}{16} - \frac{5t^4}{128} + \frac{7t^5}{256} - \cdots$

e più in generale per ogni numero reale α vale

$$(1+t)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} t^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \binom{n-1-\alpha}{n} t^n = 1 + \alpha t + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} t^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{6} t^3 + \cdots$$

Esercizio 17. 1) Mostrare che per ogni coppia di interi a, b, con $0 \leq a \leq b$ vale

$$\sum_n \binom{n+a}{b} t^n = \frac{t^{b-a}}{(1-t)^{b+1}}.$$

2) Calcolare, per ogni $n \geq 0$, il numero $a_n = \displaystyle\sum_{k\geq 0} \binom{n+k}{2k} 2^{n-k}$. (Suggerimento: scrivere la serie generatrice $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$, invertire l'ordine di sommatoria e semplificare.)

Esercizio 18. Mostrare che per ogni $m \geq 0$ vale

$$\sum_{n,k\geq 0} \binom{m}{k}\binom{n+k}{m} x^n = \frac{(1+x)^m}{(1-x)^{m+1}} = \sum_{n,k\geq 0} \binom{m}{k}\binom{n}{k} 2^k x^n.$$

Quindi per ogni $n, m \geq 0$ vale l'identità binomiale

$$\sum_{k\geq 0} \binom{m}{k}\binom{n+k}{m} = \sum_{k\geq 0} \binom{m}{k}\binom{n}{k} 2^k.$$

(Suggerimento:

$$\sum_{n,k\geq 0} \binom{m}{k}\binom{n+k}{m} x^n = \sum_{k\geq 0} \binom{m}{k} \frac{1}{x^k} \sum_{n\geq 0} \binom{n+k}{m} x^{n+k},$$

$$\sum_{n,k\geq 0} \binom{m}{k}\binom{n}{k} 2^k x^n = \sum_{n,k\geq 0} \binom{m}{k} 2^k \left(\sum_{n\geq 0} \binom{n}{k} x^n\right).$$

Esercizio 19. Provare:

$$2\sum_k \binom{2n+1}{2k} x^{2k} = (1+x)^{2n+1} + (1-x)^{2n+1};$$

$$2\sum_m \binom{2m+1}{2n} x^{2m} = \frac{x^{2n-1}}{(1-x)^{2n+1}} - \frac{x^{2n-1}}{(1+x)^{2n+1}};$$

Calcolare
$$2\sum_{k,m}\binom{2n+1}{2k}\binom{m+k}{2n}x^{2m}$$
e dedurre l'identità di Graham-Riordan
$$\sum_k\binom{2n+1}{2k}\binom{m+k}{2n}=\binom{2m+1}{2n}.$$

Esercizio 20. Siano $f(x)$ un polinomio a coefficienti interi tale che $f(1)\neq 0$, d un intero ≥ 0 e consideriamo la serie
$$\frac{f(x)}{(1-x)^{d+1}}=\sum_{n\geq 0}a_nx^n.$$
Provare che esiste un polinomio numerico $p(t)$ di grado d tale che $p(n)=a_n$ per ogni $n>>0$. Mostrare inoltre che
$$p(t)=\frac{f(1)}{d!}t^d+\text{termini di grado inferiore.}$$

Esercizio 21. Dimostrare che per ogni coppia n,m di interi non negativi vale la formula
$$n!\,m!=(n+m+1)!\int_0^1 x^n(1-x)^m dx.$$
(Sugg.: induzione su m ed integrazione per parti.)

Esercizio 22. Sia m un intero positivo, provare che
$$\sum_{n\geq m}\frac{(n-m)!}{n!}t^n=\frac{(-1)^m}{(m-1)!}(1-t)^{m-1}\log(1-t)+q(t)$$
con $q(t)$ polinomio di grado $<m$.

Soluzione. Sia
$$g(t)=(m-1)!\sum_{n\geq m}\frac{(n-m)!}{n!}t^n.$$
Per l'Esercizio 21 si ha
$$g(t)=\sum_{n\geq m}t^n\int_0^1 x^{n-m}(1-x)^{m-1}dx.$$
Considerando lo sviluppo del binomio
$$(1-x)^{m-1}=\sum_{i=0}^{m-1}(-1)^i\binom{m-1}{i}x^i$$
otteniamo
$$g(t)=\sum_{n\geq m}\sum_{i=0}^{m-1}(-1)^i\binom{m-1}{i}t^n\int_0^1 x^{n-m+i}dx=\sum_{n\geq m}\sum_{i=0}^{m-1}(-1)^i\binom{m-1}{i}\frac{t^n}{n-m+i+1}$$
$$g(t)=\sum_{i=0}^{m-1}(-1)^i\binom{m-1}{i}t^{m-i-1}\sum_{n\geq m}\frac{t^{n-m+i+1}}{n-m+i+1}=\sum_{i=0}^{m-1}(-1)^i\binom{m-1}{i}t^{m-i-1}(-\log(1-t)+h_i(t))$$
dove h_i è un polinomio in t di grado i.
$$g(t)=(-1)^m\sum_{i=0}^{m-1}(-1)^{m-i-1}\binom{m-1}{i}t^{m-i-1}(\log(1-t)-h_i(t))=(-1)^m(1-t)^{m-1}\log(1-t)+h(t)$$
con h polinomio in t di grado $<m$.

Allo stesso risultato si può arrivare osservando che per ogni $h\leq m$ la derivata h-esima di $x^m\log(x)$ è uguale a
$$\frac{m!}{(m-h)!}x^{m-h}\log(x)+\text{polinomio di grado }\leq m-h.$$
e quindi che $(x^m\log(x))^{(m+1)}=\dfrac{m!}{x}$.

8. La derivata logaritmica

Supponiamo di avere una funzione sviluppabile in serie di Taylor

$$f(t)=\sum_{n\geq 0} a_n t^n$$

e tale che $a_0>0$. Un modo per trovare relazioni tra i coefficienti a_n è quello di considerare la derivata del logaritmo di entrambi i membri, ossia considerare l'equazione

$$\frac{f'(t)}{f(t)}=\frac{\sum_{n>0} n a_n t^{n-1}}{\sum_{n\geq 0} a_n t^n}\;.$$

Vediamo un esempio: abbiamo già osservato che

$$\frac{1}{\sqrt{1-4t}}=\sum_{n\geq 0}\binom{2n}{n}t^n.$$

La derivata logaritmica è

$$\frac{\dfrac{2}{\sqrt[3]{1-4t}}}{\dfrac{1}{\sqrt{1-4t}}}=\frac{2}{1-4t}$$

e quindi

$$\sum_{n\geq 1} n\binom{2n}{n}t^{n-1}=\frac{2}{1-4t}\sum_{n\geq 0}\binom{2n}{n}t^n=2(\sum_{k\geq 0}4^k t^k)(\sum_{n\geq 0}\binom{2n}{n}t^n)$$

da cui

$$\binom{2n}{n}=\frac{1}{2n}\sum_{i=0}^{n-1}\binom{2i}{i}4^{n-i}.$$

Esercizio 23. Trovare una formula ricorsiva per i coefficienti dello sviluppo in serie di e^{e^t} (Suggerimento: derivata logaritmica).

Esercizio 24. Sia

$$e^{x+x^2}=\sum a_n x^n=1+x+\frac{3}{2}x^2+\cdots.$$

Mostrare che

$$a_n=\frac{a_{n-1}+2a_{n-2}}{n}$$

per ogni $n\geq 2$.

Esercizio 25. Sia a_n una successione di interi e siano p,q interi positivi senza fattori comuni. Provare che p divide il coefficiente di t^q nella serie formale

$$\left(\sum_{n\geq 0} a_n t^n\right)^p.$$

Soluzione. Se $p=1$ non c'è nulla da dimostrare. Supponiamo $p>1$ e scriviamo

$$\left(\sum_{n\geq 0} a_n t^n\right)^p=\sum_{m\geq 0} b_m t^m.$$

Derivando si ottiene

$$p\left(\sum_{n\geq 1} n a_n t^{n-1}\right)\left(\sum_{n\geq 0} a_n t^n\right)^{p-1}=\sum_{m\geq 0} m b_m t^{m-1}$$

e siccome i coefficienti della serie

$$\left(\sum_{n\geq 1} n a_n t^{n-1}\right)\left(\sum_{n\geq 0} a_n t^n\right)^{p-1}$$

sono interi ne consegue che p divide $m b_m$ per ogni m.

Esercizio 26. Si considerino i polinomi $\sigma_1, \dots, \sigma_n \in \mathbb{Z}[x_1, \dots, x_n]$ definiti dalla relazione

$$1 + \sigma_1 t + \sigma_2 t^2 + \cdots + \sigma_n t^n = (1 + x_1 t)(1 + x_2 t) \cdots (1 + x_n t);$$

$$\sigma_1 = \sum_i x_i , \quad \sigma_2 = \sum_{i<j} x_i x_j , \quad \dots \quad \sigma_n = x_1 x_2 \cdots x_n .$$

Per ogni $d \geq 0$ si consideri inoltre il polinomio

$$\psi_0 = n, \qquad \psi_d = x_1^d + \cdots + x_n^d \in \mathbb{Z}[x_1, \dots, x_n].$$

Dimostrare:

(1) Ogni ψ_d è un polinomio a coefficienti interi nei σ_j. Ad esempio $\psi_1 = \sigma_1$, $\psi_2 = \sigma_1^2 - 2\sigma_2$ eccetera. Suggerimento: cosiderare l'espressione (derivata logaritmica)

$$\frac{\frac{d}{dt}(1 + \sigma_1 t + \sigma_2 t^2 + \cdots + \sigma_n t^n)}{1 + \sigma_1 t + \sigma_2 t^2 + \cdots + \sigma_n t^n}.$$

(2) Ogni σ_d è un polinomio a coefficienti razionali negli ψ_j. Ad esempio $\sigma_2 = \dfrac{\psi_1^2 - \psi_2}{2}$.

Soluzione. Si ha

$$\begin{aligned}\log(1 + \sigma_1 t + \sigma_2 t^2 + \cdots + \sigma_n t^n) &= \log((1 + x_1 t)(1 + x_2 t) \cdots (1 + x_n t)) \\ &= \sum_{i=1}^n \log(1 + x_i t) = \sum_{i=1}^n \sum_{d>0} (-1)^d x_i^d \frac{t^d}{d} = \sum_{d>0} (-1)^d \psi_d \frac{t^d}{d}\end{aligned}$$

Derivando si ottiene

$$\frac{\frac{d}{dt}(1 + \sigma_1 t + \sigma_2 t^2 + \cdots + \sigma_n t^n)}{1 + \sigma_1 t + \sigma_2 t^2 + \cdots + \sigma_n t^n} = \sum_{d>0} (-1)^d \psi_d t^{d-1}$$

e quindi $(-1)^d \psi_d$ è il coefficiente di t^{d-1} nella serie

$$(\sigma_1 + 2\sigma_2 t + \cdots + n\sigma_m t^{n-1}) \left(\sum_{h \geq 0} (-1)^h (\sigma_1 t + \sigma_2 t^2 + \cdots + \sigma_n t^n)^h \right).$$

Viceversa

$$1 + \sigma_1 t + \sigma_2 t^2 + \cdots + \sigma_n t^n = \exp(\log(1 + \sigma_1 t + \sigma_2 t^2 + \cdots + \sigma_n t^n)) = \exp\left(\sum_{d>0} (-1)^d \psi_d \frac{t^d}{d} \right)$$

e quindi σ_i è il coefficiente di t^i nella serie

$$\sum_{h \geq 0} \frac{1}{h!} \left(\sum_{d>0} (-1)^d \psi_d \frac{t^d}{d} \right)^h .$$

Esercizio 27. Sia $n > 0$ intero fissato. Il *numero di inversioni* di una permutazione σ di $\{1, \dots, n\}$ è il numero di coppie (i, j) con $1 \leq i < j \leq n$ tali che $\sigma(i) > \sigma(j)$. Indichiamo con I_k, $0 \leq k \leq n(n-1)/2$, il numero di permutazioni che hanno k inversioni. Dimostrare che

$$\sum_k I_k x^k = \prod_{i=2}^n \frac{x^i - 1}{x - 1}.$$

9. Numeri di Bell

Dato un intero $n > 0$ si definisce $b(n)$ come il numero di relazioni di equivalenza possibili nell'insieme $\{1, \dots, n\}$. I numeri $b(n)$ vengono detti *numeri di Bell*; $b(1) = 1$, $b(2) = 2$, $b(3) = 5$ eccetera. Si pone inoltre per convenzione $b(0) = 1$.

Lemma 9.1. *Per ogni $n \geq 0$ vale la formula ricorsiva*

$$b(n+1) = \sum_{s=0}^{n} \binom{n}{s} b(s).$$

Dimostrazione. Basta mostrare che il numero di relazioni di equivalenza su $\{0, 1, \dots, n\}$ in cui la classe di equivalenza di 0 contiene $n - s + 1$ elementi, con $0 \leq s \leq n$, è uguale a $\binom{n}{s} b(s)$.

Ogni tale relazione è univocamente determinata da un sottoinsieme $S \subset \{1, \dots, n\}$ di cardinalità s e da una relazione di equivalenza su S. Gli elementi del complementare di S saranno quelli equivalenti a 0. $\square$

Esercizio 28. Provare per induzione su n che $b(n) \leq n!$.

Teorema 9.2. *Nelle notazioni precedenti, e con la convenzione che $0^0 = 1$, vale*

$$\sum_{n\geq 0} \frac{b(n)}{n!} x^n = e^{e^x - 1} \qquad e \qquad b(n) = \frac{1}{e} \sum_{r \geq 0} \frac{r^n}{r!} \qquad \textit{per ogni}\ \ n \geq 0\ .$$

Dimostrazione. Dimostriamo per induzione su n che vale la formula $b(n) = \dfrac{1}{e}\displaystyle\sum_{r\geq 0} \frac{r^n}{r!}$. Si ha $b(0) = 1 = \dfrac{1}{e}\displaystyle\sum_{r\geq 0}\frac{1}{r!}$, mentre per il Lemma 9.1 si ha

$$\begin{aligned} b(n+1) &= \sum_{s=0}^{n} \binom{n}{s} b(s) = \frac{1}{e} \sum_{s=0}^{n} \sum_{r\geq 0} \binom{n}{s} \frac{r^s}{r!} = \frac{1}{e} \sum_{r \geq 0} \frac{1}{r!} \sum_{s=0}^{n} \binom{n}{s} r^s \\ &= \frac{1}{e} \sum_{r\geq 0} \frac{1}{r!}(1+r)^n = \frac{1}{e} \sum_{r\geq 0} \frac{(1+r)^{n+1}}{(r+1)!} = \frac{1}{e} \sum_{r\geq 1} \frac{r^{n+1}}{r!} = \frac{1}{e} \sum_{r\geq 0} \frac{r^{n+1}}{r!}. \end{aligned}$$

La serie generatrice $F(x) = \displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{b(n)}{n!} x^n$ è convergente in un intorno di 0, si ha $B(0) = b(0) = 1$ e

$$F(x)' = \sum_{n\geq 0} b(n+1) \frac{x^n}{n!} = \sum_{n\geq 0} \sum_{s=0}^{n} \binom{n}{s} b(s) \frac{x^n}{n!} = \sum_{n\geq 0} \sum_{s=0}^{n} b(s) \frac{x^s}{s!} \frac{x^{n-s}}{(n-s)!} = B(x) e^x.$$

Il problema di Cauchy

$$F(x)' = e^x F(x), \qquad B(0) = 1,$$

ha come soluzione $B(x) = e^{e^x - 1}$. $\square$

Notiamo che

$$\sum_{n\geq 0} b(n) \frac{x_n}{n!} = \frac{1}{e} e^{e^x} = \frac{1}{e} \sum_{r\geq 0} \frac{e^{rx}}{r!} = \frac{1}{e} \sum_{r\geq 0} \sum_{n \geq 0} \frac{r^n x^n}{n! r!} = \sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{n!} \left(\frac{1}{e} \sum_{r\geq 0} \frac{r^n}{r!} \right).$$

e quindi che le due uguaglianze del teorema sono una conseguenza dell'altra.

10. I numeri di Stirling

Esercizio 29. Si consideri la successione di polinomi

$$S_0(x) = 1, \qquad S_{n+1}(x) = x(S_n(x) + S_n(x)') = xe^{-x}(S_n(x)e^x)'.$$

Dimostrare che $S_n(1) = b(n)$. I coefficienti di tali polinomi

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \left\{ {n \atop k} \right\} x^k$$

si chiamano *numeri di Stirling di seconda specie*. Dimostrare che, ponendo $\left\{ {n \atop k} \right\} = 0$ per $k < 1$ e $k > n$, si hanno le formule

$$\left\{ {n \atop 1} \right\} = \left\{ {n \atop n} \right\} = 1, \qquad \left\{ {n \atop k} \right\} = \left\{ {n-1 \atop k-1} \right\} + k\left\{ {n-1 \atop k} \right\},$$

$$\left\{ {n \atop 2} \right\} = 2^{n-1} - 1, \qquad \left\{ {n \atop n-1} \right\} = \binom{n}{2}.$$

Mostrare inoltre che $\left\{ {n \atop k} \right\}$ è uguale al numero di relazioni di equivalenza di $\{1, \ldots, n\}$ con k classi di equivalenza (Sugg.: ragionamento analogo al Lemma 9.1).

Si noti che i numeri $\left\{ {n \atop k} \right\}$, con $n, k > 0$ sono univocamente determinati dalle condizioni

$$\left\{ {1 \atop 1} \right\} = 1, \qquad \left\{ {1 \atop i} \right\} = 0 \quad i \neq 1, \qquad \left\{ {n \atop k} \right\} = \left\{ {n-1 \atop k-1} \right\} + k\left\{ {n-1 \atop k} \right\}$$

Lemma 10.1. *Sia $f(t) \in \mathbb{K}[[t]]$ serie formale e poniamo $g(t) = f(e^t - 1)$. Per ogni $n > 0$ vale la formula*

$$g^{(n)}(t) = \sum_{i=1}^{n} \left\{ {n \atop i} \right\} f^{(i)}(e^t - 1)e^{it}$$

dove $f^{(i)}$ indica la derivata i-esima.

Dimostrazione. Induzione su n, essendo per $n = 1$ la semplice derivata della funzione composta.

$$g^{(n+1)}(t) = \sum_i \left\{ {n \atop i} \right\} (f^{(i+1)}(e^t - 1)e^{(i+1)t} + if^{(i)}(e^t - 1)e^{it})$$

$$g^{(n+1)}(t) = \sum_i \left(\left\{ {n \atop i-1} \right\} + i\left\{ {n \atop i} \right\} \right) f^{(i)}(e^t - 1)e^{it}$$

□

Ponendo $f(t) = t^k$ otteniamo

$$g^{(n)}(0) = \left\{ {n \atop k} \right\} k!$$

e quindi

$$(e^t - 1)^k = k! \sum_{n \geq k} \left\{ {n \atop k} \right\} \frac{t^n}{n!} = k! t^k \sum_{n \geq 0} \left\{ {n+k \atop k} \right\} \frac{t^n}{(n+k)!} .$$

$$\left(\frac{e^t - 1}{t} \right)^k = k! \sum_{n \geq 0} \left\{ {n+k \atop k} \right\} \frac{t^n}{(n+k)!} .$$

Esercizio 30. Provare che per ogni $n > 1$ si ha

$$\sum_{i=1}^{n} (-1)^i \left\{ {n \atop i} \right\} (i-1)! = 0 .$$

(Sugg.: $f(t) = \log(1 + t)$).

Teorema 10.2. *Dati due interi positivi n, k, il numero*

$$W_{n,k} = \sum_{r=0}^{k} (-1)^{k-r} \binom{k}{r} r^n$$

è uguale al numero di applicazioni surgettive $f \colon \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, k\}$. *In particolare $W_{n,k} = 0$ per ogni $k > n$.*

Dimostrazione. Definiamo

$$X = \{(S, f) \mid S \subset \{1, \dots, k\}, \quad f \colon \{1, \dots, n\} \to S\},$$

allora

$$W_{n,k} = \sum_{r=0}^{k} (-1)^{k-r} \binom{k}{r} r^n = \sum_{(S,f)\in X} (-1)^{k-|S|},$$

dove $|S|$ indica la cardinalità dell'insieme S. Possiamo scrivere anche

$$W_{n,k} = \sum_f W_{n,k}(f), \quad \text{dove} \quad W_{n,k}(f) = \sum_{S:Im(f)\subset S} (-1)^{k-|S|}.$$

È chiaro che se f è surgettiva allora $W_{n,k}(f) = 1$. Basta quindi dimostrare che che se f non è surgettiva, allora $W_{n,k}(f) = 0$. Supponiamo che $|Im(f)| = s$ con $s < k$, allora per ogni $s \le r \le k$ il numero di sottoinsiemi $S \subset \{1, \dots, k\}$ di cardinalità r che contengono $Im(f)$ è $\binom{k-s}{r-s}$ e quindi

$$W_{n,k}(f) = \sum_{r=s}^{k} (-1)^{k-r} \binom{k-s}{r-s} = \sum_{i=0}^{k-s} (-1)^{k-s-i} \binom{k-s}{i} = (1-1)^{k-s} = 0.$$

□

Con la convenzione che $0^0 = 1$ si ha inoltre $W_{0,0} = 1$ e $W_{n,0} = W_{0,k} = 0$ per ogni $k, n > 0$.

Esercizio 31. Dimostrare che $W_{n,k} = \left\{ {n \atop k} \right\} k!$.

Esercizio 32. Utilizzare il Teorema 10.2 per calcolare i numeri di Stirling di seconda specie e per dare una dimostrazione alternativa del Teorema 9.2.

11. I numeri di Bernoulli

I *numeri di Bernoulli* B_n, $n \ge 0$, sono definiti mediante la loro EGF (exponential generating function)

$$B(x) = \sum_{n\ge 0} \frac{B_n}{n!} x^n = \frac{x}{e^x - 1}\,.$$

Osservazione 11.1. Mostreremo nella Sezione 14 che per ogni $n \ge 0$ vale $|B_n| \le \dfrac{\pi^2}{3} \dfrac{n!}{(2\pi)^n}$, mentre per ogni n pari vale $|B_n| \ge \dfrac{n!}{(2\pi)^n}$. In particolare il raggio di convergenza della serie $\sum_{n\ge 0} \frac{B_n}{n!} x^n$ è 2π. È possibile calcolare il valore del raggio di convergenza in maniera semplice utilizzando la teoria delle funzioni olomorfe (insegnamento di variabile complessa).

Teorema 11.2. *Nelle notazioni precedenti vale la formula*

$$B_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{W_{n,k}}{k+1}\,.$$

Dimostrazione. Bisogna dimostrare che la funzione generatrice

$$f(t) = \sum_{n\ge 0} \frac{t^n}{n!} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{W_{n,k}}{k+1}$$

è uguale a $t/(e^t - 1)$. Siccome $W_{n,k} = 0$ se $n < k$ possiamo scrivere

$$f(t) = \sum_{n,k\ge 0} (-1)^k \frac{W_{n,k}}{k+1} \frac{t^n}{n!},$$

che per il Teorema 10.2 diventa

$$f(t) = \sum_{n,k\ge 0} \sum_{r=0}^{k} (-1)^r \frac{1}{k+1} \binom{k}{r} r^n \frac{t^n}{n!}\,.$$

Sommando su n si ha allora

$$f(t)=\sum_{k\geq 0}\sum_{r=0}^{k}(-1)^r\frac{1}{k+1}\binom{k}{r}\sum_{n\geq 0}r^n\frac{t^n}{n!}=\sum_{k\geq 0}\sum_{r=0}^{k}\frac{(-1)^r}{k+1}\binom{k}{r}e^{rt}=\sum_{k\geq 0}\frac{1}{k+1}(1-e^t)^k\,.$$

Quindi

$$((1-e^t)f(t))'=-e^t\sum_{k\geq 0}(1-e^t)^k=\frac{-e^t}{1-(1-e^t)}=-1,$$

da cui segue

$$(1-e^t)f(t)=-t,\qquad f(t)=\frac{t}{e^t-1}\,.$$

□

Esercizio 33. Calcolare $B(x)-B(-x)$ e dedurre che $B_n=0$ per ogni n dispari maggiore di 2.

Esercizio 34. Mostrare che $B(x)e^x=B(-x)$ e dedurre che per ogni $n\geq 1$ vale

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n+1}{k}B_k=0\,,\qquad B_n=-\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n+1}{k}B_k.$$

$$B_{2n}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2n+1}\sum_{k=0}^{n-1}\binom{2n+1}{2k}B_{2k}.$$

Utilizzate tali formule per provare che

$$B_0=1,\quad B_1=-\frac{1}{2},\quad B_2=\frac{1}{6},\quad B_4=-\frac{1}{30},\quad B_6=\frac{1}{42},\quad B_8=-\frac{1}{30},\quad B_{10}=\frac{5}{66}.$$

Esercizio 35. Per ogni coppia di interi $d,n\geq 0$ indichiamo con $g_d(n)=0^d+1^d+2^d+\cdots+(n-1)^d$ (dove si intende $0^0=1$). Si ha $g_0(n)=n$, $g_1(n)=n(n-1)/2$ eccetera. Dimostrare che

$$\sum_{d\geq 0}\frac{g_d(n)}{d!}x^d=\sum_{h=0}^{n-1}e^{hx}=\sum_{h=0}^{n-1}(e^x)^h=\frac{e^{nx}-1}{x}\,\frac{x}{e^x-1}=B(x)\left(\sum_{r>0}\frac{n^r}{r!}x^r\right)$$

e dedurre la formula

$$g_d(n)=\frac{1}{d+1}\sum_{r=1}^{d+1}\binom{d+1}{r}B_{d+1-r}n^r=\sum_{s=0}^{d}\frac{1}{s+1}\binom{d}{s}B_{d-s}n^{s+1}. \tag{11}$$

Test: siete più veloci di Bernoulli? Jakob Bernoulli si vantava di aver calcolato in meno di 8 minuti la sommatoria $g_{10}(1000)$. Utilizzando i risultati degli esercizi precedenti, sapere fare altrettanto? (Ovviamente Bernoulli faceva tutti i conti a mano).

Esercizio 36. Sia $Q(x)=B(-x)$; provare che $xQ(x)'=Q(x)-Q(x)B(x)$ e dedurre la formula:

$$(1+n(-1)^n)B_n=-\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^k\binom{n}{k}B_kB_{n-k}.$$

Usare tale formula ed i valori numerici $B_0=1$, $B_1=-1/2$, $B_2=1/6$, $B_3=0$, per dimostrare induttivamente su $n\geq 4$ che:

(1) $B_n=0$ se n è dispari;
(2) $B_n<0$ se n è divisibile per 4;
(3) $B_n>0$ se n è pari ma non divisibile per 4.

Esercizio 37. Provare che $xB(x)'=(1-x)B(x)-B(x)^2$ e dedurre la formula (di Eulero):

$$-B_n=B_{n-1}+\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}B_kB_{n-k}.$$

Esercizio 38. Si considerino le successioni $\phi_n(x) \in \mathbb{Q}[x]$, $I_n \in \mathbb{Q}$, $n \geq 1$, definite per ricorrenza:

$$I_0 = -1, \quad \phi_1(x) = x, \qquad I_n = \int_0^1 \phi_n(x)dx, \qquad \phi_{n+1}(x) = \int_0^x \phi_n(s)ds - xI_n.$$

Dimostrare che

$$\sum_{n\geq 0}(\phi_n(x) - I_n)t^n = \frac{te^{tx}}{e^t - 1} \quad \text{e} \quad I_n = -\frac{B_n}{n!}\,.$$

(Suggerimento: sia $F(x,t) = \sum_{n\geq 0}(\phi_n(x) - I_n)t^n$; calcolare la derivata di F rispetto a x e determinare il rapporto $F(x,t)/F(0,t)$. Mostrare inoltre che $\int_0^1 F(x,t)dx = 1$.)

Esercizio 39. I *polinomi di Bernoulli* $B_n(x) \in \mathbb{Q}[x]$ si definiscono tramite la EGF

$$\sum_{n\geq 0}\frac{B_n(x)}{n!}t^n = \frac{te^{xt}}{e^t - 1}\,.$$

Provare che

$$\sum_{n\geq 0}\frac{B_n(x)}{n!}t^n = \left(\sum_{m\geq 0}\frac{B_m}{m!}t^m\right)\left(\sum_{r\geq 0}\frac{x^r}{r!}t^r\right), \qquad B_n(x) = \sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}B_{n-r}x^r.$$

Mostrare inoltre che $g_{n-1}(m) = \dfrac{B_n(m) - B_n}{n}$.

Esercizio 40. Dato un intero $n > 0$ provare che per ogni $d \geq 0$ vale

$$\sum_{r=0}^{d}\binom{d+1}{r}g_r(n) = n^{d+1}, \qquad \sum_{r=0}^{+\infty}\binom{d+1}{r}g_r(n) = n^{d+1} + g_{d+1}(n) = g_{d+1}(n+1).$$

Esercizio 41. Provare che la matrice $(g_d(r+1))$, $1 \leq d, r \leq m$, è invertibile (sugg.: sottrarre ad ogni colonna la precedente e ridursi ad una matrice di Vandermonde). Lo stesso vale se nell'ultima riga il termine $g_m(r+1)$ è sostituito con r^m.

Esercizio 42. Usare gli Esercizi 40 e 41 per dedurre che la matrice di coefficienti $a_{d,r} = \dbinom{d+1}{r}$, $0 \leq d, r \leq m$, è invertibile.

I numeri di Bernoulli intevengono anche nello sviluppo di Taylor della tangente. Ricordiamo che le funzioni iperboliche sono definite come

$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \qquad \cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \qquad \tanh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}\,.$$

Esercizio 43. Provare che valgono la formule

$$\tanh(x) = \frac{2}{\tanh(2x)} - \frac{1}{\tanh(x)}, \qquad \tanh(x)' = 1 - \tanh^2(x)\,.$$

Dunque si ha

$$\frac{x}{\tanh(x)} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} = x\frac{e^{2x} + 1}{e^{2x} - 1} = x + \frac{2x}{e^{2x} - 1} = x + \sum_{n\geq 0}\frac{B_n}{n!}(2x)^n\,.$$

Siccome $B_1 = -1/2$ e $B_n = 0$ per ogni n dispari maggiore di 1 si ottiene

$$\frac{x}{\tanh(x)} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{B_{2n}}{(2n)!}(2x)^{2n}\,. \tag{12}$$

$$\begin{aligned}\tanh(x) &= \frac{1}{x}\left(\frac{2x}{\tanh(2x)} - \frac{x}{\tanh(x)}\right) = \frac{1}{x}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{B_{2n}}{(2n)!}((4x)^{2n} - (2x)^{2n}) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty}2^{2n}(2^{2n} - 1)\frac{B_{2n}}{(2n)!}x^{2n-1}\,.\end{aligned} \tag{13}$$

Corollario 11.3. *Per ogni $n \geq 0$ il numero $2^{2n}(2^{2n} - 1)\dfrac{B_{2n}}{2n}$ è intero.*

Dimostrazione. Il corollario è del tutto equivalente a dire che tutte le derivate di ordine superiore della funzione $\tanh(x)$ assumono valori interi per $x = 0$. Usando la formula $\tanh(x)' = 1 - \tanh^2(x)$ ed induzione su n si dimostra facilmente che la derivata n-esima di $\tanh(x)$ è un polinomio a coefficienti interi in $\tanh(x)$. $\square$

Siccome $\tan(x) = \dfrac{\tanh(ix)}{i}$, dove i è l'unità immaginaria, so ottiene lo sviluppo di Taylor della tangente:

$$\tan(x) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}2^{2n}(2^{2n}-1)\frac{B_{2n}}{(2n)!}x^{2n-1}\,.$$

Il precedente corollario è un caso particolare del seguente teorema.

Teorema 11.4. *Per ogni coppia di interi $n, k \geq 0$ il numero*

$$\frac{k^n(k^n-1)}{n}B_n$$

è intero.

Dimostrazione. Fissiamo k che possiamo supporre $k \geq 2$ senza perdità di generalità e consideriamo la serie formale

$$f(x) = 1 + e^{-x} + e^{-2x} + \cdots + e^{(1-k)x} = \frac{1-e^{-kx}}{1-e^{-x}}\,,$$

ed osserviamo che tutte le sue derivate assumono valore intero in $x = 0$ Indichiamo con $g(x) = f'(x)/f(x)$ la derivata logaritmica; siccome $f(0) = k$ si verifica facilmente per induzione che la derivata n-esima di $g(x)$ ha la forma

$$g^{(n)}(x) = \frac{1}{f(x)^{n+1}}P(f(x), f'(x), \qquad , f^{(n)}(x))$$

per un opportuno polinomio P a coefficienti interi e quindi $k^{n+1}g^{(n)}(0) \in \mathbb{Z}$ per ogni n.

Effettuando i conti nell'anello $L = \cup_{p\in\mathbb{Z}}t^p\mathbb{C}[[t]]$ delle serie formali di Laurent con poli troviamo

$$\begin{aligned}
g(x) &= \frac{-ke^{-kx}}{1-e^{-kx}} - \frac{-e^{-x}}{1-e^{-x}} = \frac{1}{x}\left(\frac{x}{e^x-1} - \frac{kx}{e^{kx}-1}\right)\\
&= \sum_{n\geq 0}\frac{B_n}{n!}x^{n-1} - k\sum_{n\geq 0}\frac{B_n}{n!}(kx)^{n-1}\\
&= \sum_{n\geq 1}(1-k^n)\frac{B_n}{n!}x^{n-1}\,.
\end{aligned}$$

Ne segue che la derivata $n-1$-esima di $g(x)$ calcolata in 0 è uguale a $(1-k^n)\dfrac{B_n}{n}$ per quanto visto sopra $k^n(1-k^n)\dfrac{B_n}{n} \in \mathbb{Z}$.

$\square$

12. I triangoli rovesciati di Tartaglia

È noto a tutti che per triangolo di Tartaglia si intende una particolare disposizione geometrica dei coefficienti binomiali $\binom{n}{k}$, $0 \leq k \leq n$, disposti per l'appunto a triangolo, o per meglio dire ad albero di Natale, ed è caratterizzata dal fatto che al vertice contiene il numero 1 ed ogni numero è uguale alla somma dei due numeri adiacenti che lo sovrastano (si intende che i numeri esterni al triangolo, non disegnati, sono tutti uguali a 0), vedi Figura 1.

In altri termini, il triangolo di Tartaglia serve per visualizzare le ben note formule ricorsive.

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1, \qquad \binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}, \quad 0 < k < n\,.$$

Il triangolo di Tartaglia è inoltre simmetrico rispetto all'asse verticale, ossia

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} \text{ per ogni } 0 \leq k \leq n\,.$$

$$\begin{tikzcd}[column sep=tiny, row sep=small]
&&&&&&& 1 \arrow[dl] \arrow[dr] &&&&&&& \\
&&&&&& 1 \arrow[dl] \arrow[dr] && 1 \arrow[dl] \arrow[dr] &&&&&& \\
&&&&& 1 \arrow[dl] \arrow[dr] && 2 \arrow[dl] \arrow[dr] && 1 \arrow[dl] \arrow[dr] &&&&& \\
&&&& 1 \arrow[dl] \arrow[dr] && 3 \arrow[dl] \arrow[dr] && 3 \arrow[dl] \arrow[dr] && 1 \arrow[dl] \arrow[dr] &&&& \\
&&& 1 \arrow[dl] \arrow[dr] && 4 \arrow[dl] \arrow[dr] && 6 \arrow[dl] \arrow[dr] && 4 \arrow[dl] \arrow[dr] && 1 \arrow[dl] \arrow[dr] &&& \\
&& 1 \arrow[dl] \arrow[dr] && 5 \arrow[dl] \arrow[dr] && 10 \arrow[dl] \arrow[dr] && 10 \arrow[dl] \arrow[dr] && 5 \arrow[dl] \arrow[dr] && 1 \arrow[dl] \arrow[dr] && \\
& 1 \arrow[dl] \arrow[dr] && 6 \arrow[dl] \arrow[dr] && 15 \arrow[dl] \arrow[dr] && 20 \arrow[dl] \arrow[dr] && 15 \arrow[dl] \arrow[dr] && 6 \arrow[dl] \arrow[dr] && 1 \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
1 && 7 && 21 && 35 && 35 && 21 && 7 && 1
\end{tikzcd}$$

FIGURA 1. Nel triangolo di Tartaglia ogni numero è la somma dei due che lo sovrastano ed il coefficiente $\binom{n}{k}$ occupa la $k+1$-esima posizione nella $n+1$-esima riga.

Cosa succede se rovesciamo il triangolo mantenendo la simmetria verticale e la regola che nel vertice deve esserci 1 e che ogni numero è uguale alla somma dei due numeri adiacenti che lo sovrastano?

Si vede subito che tale operazione si può fare in una moltitudine di casi diversi, come ad esempio:

$$\begin{tikzcd}[column sep=tiny, row sep=small]
\frac{1}{8} \arrow[dr] && \frac{1}{8} \arrow[dl] \arrow[dr] && \frac{1}{8} \arrow[dl] \arrow[dr] && \frac{1}{8} \arrow[dl] \\
& \frac{1}{4} \arrow[dr] && \frac{1}{4} \arrow[dl] \arrow[dr] && \frac{1}{4} \arrow[dl] & \\
&& \frac{1}{2} \arrow[dr] && \frac{1}{2} \arrow[dl] && \\
&&& 1 &&&
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}[column sep=tiny, row sep=small]
\frac{1}{2} \arrow[dr] && 0 \arrow[dl] \arrow[dr] && 0 \arrow[dl] \arrow[dr] && \frac{1}{2} \arrow[dl] \\
& \frac{1}{2} \arrow[dr] && 0 \arrow[dl] \arrow[dr] && \frac{1}{2} \arrow[dl] & \\
&& \frac{1}{2} \arrow[dr] && \frac{1}{2} \arrow[dl] && \\
&&& 1 &&&
\end{tikzcd}$$

Se consideriamo i possibili triangoli rovesciati di Tartaglia con lati di lunghezza 3, ossia contenenti ciascuno 4 numeri, notiamo che sono infiniti e tutti univocamente determinati dal numero al suo interno, che può assumere qualunque valore:

$$\begin{tikzcd}[column sep=small, row sep=small]
\frac{1-3x}{2} \arrow[dr] && \frac{x}{2} \arrow[dl] \arrow[dr] && \frac{x}{2} \arrow[dl] \arrow[dr] && \frac{1-3x}{2} \arrow[dl] \\
& \frac{1-2x}{2} \arrow[dr] && x \arrow[dl] \arrow[dr] && \frac{1-2x}{2} \arrow[dl] & \\
&& \frac{1}{2} \arrow[dr] && \frac{1}{2} \arrow[dl] && \\
&&& 1 &&&
\end{tikzcd}$$

Traducendo il tutto in maniera algebrica, chiameremo triangolo rovesciato di Tartaglia nel campo $\mathbb{K}$ una successione doppia $a_{i,j} \in \mathbb{K}$, con i, j interi non negativi, tali che:

$$a_{0,0} = 1, \qquad a_{i,j} = a_{j,i}, \qquad a_{i,j} = a_{i+1,j} + a_{i,j+1} \quad \text{per ogni } i, j \geq 0\,.$$

$$\begin{tikzcd}[column sep=small, row sep=small]
a_{3,0} \arrow[dr] && a_{2,1} \arrow[dl] \arrow[dr] && a_{1,2} \arrow[dl] \arrow[dr] && a_{0,3} \arrow[dl] \\
& a_{2,0} \arrow[dr] && a_{1,1} \arrow[dl] \arrow[dr] && a_{0,2} \arrow[dl] & \\
&& a_{1,0} \arrow[dr] && a_{0,1} \arrow[dl] && \\
&&& 1 &&&
\end{tikzcd}$$

Siccome $2a_{1,0} = a_{1,0} + a_{0,1} = 1$ condizione necessaria affiché esistano triangoli rovesciati di Tartaglia è che il campo $\mathbb{K}$ abbia caratteristica diversa da 2; tale condizione è anche sufficiente, come dimostra l'esempio

$$a_{i,j} = \frac{t^i(1-t)^j + (1-t)^i t^j}{2}$$

dove t è un qualunque elemento di $\mathbb{K}$ (quando $t = 0$ oppure $t = 1$ si intende per convenzione $t^0 = (1-t)^0 = 1$).

Se $a_{i,j}$ è un triangolo rovesciato di Tartaglia, dalle formule ricorsive segue facilmente, per ogni intero $n \geq 0$, il rovesciato del binomio di Newton:

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a_{i,n-i} = 1\,. \tag{14}$$

Infatti, per induzione su n si ha

$$\begin{aligned}
1 &= \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a_{i,n-i} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a_{i+1,n-i} + \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a_{i,n-i+1} \\
&= \sum_{i=1}^{n+1} \binom{n}{i-1} a_{i,n+1-i} + \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a_{i,n+1-i} \\
&= a_{0,n+1} + a_{n+1,0} + \sum_{i=1}^{n} \left(\binom{n}{i-1} + \binom{n}{i} \right) a_{i,n+1-i} \\
&= \sum_{i=0}^{n+1} \binom{n+1}{i} a_{i,n+1-i}\,.
\end{aligned}$$

Quindi i triangoli rovesciati $a_{i,j}$ dipendono da una serie di parametri, che possono essere ad esempio dati da opportune sottosuccessioni a_{i_n,j_n}, $n > 0$. I seguenti due lemmi forniscono due esempi di tali sottosuccessioni: le dimostrazioni sono lasciate per esercizio.

Esercizio 44. Sia $x_n \in \mathbb{K}$ una successione a valori in un campo di caratteristica $\neq 2$. Allora esiste un unico triangolo rovesciato di Tartaglia $a_{i,j}$ tale che $a_{n,n} = x_n$ per ogni $n > 0$.

Esercizio 45. Sia $y_n \in \mathbb{K}$ una successione a valori in un campo di caratteristica 0. Allora esiste un unico triangolo rovesciato di Tartaglia $a_{i,j}$ tale che $a_{2n+1,0} = y_n$ per ogni $n > 0$.

Vediamo adesso un altro interessante esempio sul campo $\mathbb{Q}$ dei numeri razionali. Consideriamo il seguente sviluppo in serie di Taylor

$$\frac{x-y}{e^x - e^y} = \frac{1}{\sum_{i,j=0}^{\infty} \dfrac{x^i y^j}{(i+j+1)!}} = \sum_{i,j\geq 0} B_{i,j} \frac{x^i y^j}{i!\,j!} \in \mathbb{Q}[[x,y]]\,.$$

I primi termini sono:

$$\begin{aligned}
\frac{x-y}{e^x - e^y} = 1 - \left(\frac{x}{2} + \frac{y}{2}\right) + \frac{1}{2!}\left(\frac{x^2}{6} + \frac{2xy}{3} + \frac{y^2}{6}\right) - \frac{1}{3!}\left(\frac{x^2 y}{2} + \frac{xy^2}{2}\right) \\
+ \frac{1}{4!}\left(-\frac{x^4}{30} + \frac{2x^3 y}{15} + \frac{4x^2y^2}{5} + \frac{2xy^3}{15} - \frac{y^4}{30}\right) + \cdots,
\end{aligned}$$

Ponendo $y = 0$ si ha

$$\frac{x}{e^x - 1} = \sum_{n\geq 0} a_{n,0} \frac{x^n}{n!}$$

e quindi ritroviamo i numeri di Bernoulli $B_{n,0} = B_n$. La simmetria dei coefficienti $B_{i,j} = B_{j,i}$ è evidente. Un semplice conto mostra che

$$\frac{x-y}{e^x - e^y} + \frac{\partial}{\partial x}\frac{x-y}{e^x - e^y} + \frac{\partial}{\partial y}\frac{x-y}{e^x - e^y} = 0$$

e quindi $B_{i,j} + B_{i+1,j} + B_{i,j+1} = 0$ per ogni $i, j \geq 0$.

Da tutto ciò segue che i numeri razionali $a_{i,j} = (-1)^{i+j} B_{i,j}$ sono un triangolo rovesciato di Tartaglia con la proprietà che $a_{n,0} = B_n$ per ogni $n \geq 2$ e che per l'Esercizio 45 è l'unico tale che $a_{2n+1,0} = 0$ per ogni $n > 0$.

Esercizio 46. Usare l'identità

$$e^{-y}\frac{x-y}{e^x - e^y} = \frac{x-y}{e^{x-y} - 1}$$

per dimostrare, nelle notazioni precedenti, la formula

$$B_{i,j} = (-1)^j \sum_{k=0}^{j} \binom{j}{k} B_{i+k}\,, \qquad i, j \geq 0\,.$$

13. La formula di somma di Euler-Maclaurin

Un metodo alternativo per dimostrare la formula (11) è come conseguenza della *formula di somma di Euler-Maclaurin* la quale, dato un polinomio $f(x) \in \mathbb{C}[x]$, fornisce un polinomio $g(x)$ tale che per ogni intero $n > 0$ vale

$$f(x) + f(x+1) + \cdots + f(x+n-1) = g(x+n) - g(x)\,. \tag{15}$$

A tal fine consideriamo una primitiva $F(x) \in \mathbb{C}[x]$ di $f(x)$, ossia $DF = f$, dove $D\colon \mathbb{C}[x] \to \mathbb{C}[x]$ è l'operatore di derivazione. Si definisce poi l'operatore lineare

$$\phi\colon \mathbb{C}[x] \to \mathbb{C}[x], \qquad \phi = \frac{D}{e^D - 1} = \sum_{n\ge 0} \frac{B_n}{n!} D^n\,.$$

Si noti che ϕ è invertibile con inverso

$$\phi^{-1} = \frac{e^D - 1}{D} = \sum_{n\ge 0} \frac{1}{(n+1)!} D^d\,,$$

e che sia ϕ che ϕ^{-1} commutano con D. Inoltre, dato comunque un polinomio h, per la formula di Taylor si ha $(e^D h)(t) = h(t+1)$.

Dimostriamo adesso che il polinomio

$$g = \phi(F) = \sum_{n\ge 0} \frac{B_n}{n!} D^n F = F + \sum_{n\ge 1} \frac{B_n}{n!} D^{n-1} f$$

soddisfa la formula (15) Allora, siccome $(e^D - 1)\phi = D$ si ha $(e^D - 1)g = f$, da cui $f(x) = g(x+1) - g(x)$ per ogni x.

A meno di problemi di convergenza, sui quali sorvoliamo, possiamo applicare la formula di Euler-Maclaurin a funzioni più generali dei semplici polinomi. Un esempio interessante si ha per $f(x) = \log(x)$, la cui primitiva è $F(x) = x(\log(x) - 1)$ e quindi per ogni $n \ge 2$ si ha

$$D^n F(x) = D^{n-2} \frac{1}{x} = (-1)^{n-2} \frac{(n-2)!}{x^{n-1}}\,.$$

Dunque

$$\begin{aligned} g(x) = \frac{D}{e^D - 1} F(x) &= x(\log(x) - 1) - \frac{\log(x)}{2} + \sum_{d\ge 2} \frac{B_d}{d!} (-1)^d \frac{(d-2)!}{x^{d-1}} \\ &= x(\log(x) - 1) - \frac{\log(x)}{2} + \sum_{d\ge 1} \frac{B_{2d}}{2d(2d-1)} \frac{1}{x^{2d-1}}\,. \end{aligned}$$

Si ha quindi, per ogni intero $n \ge 2$

$$\begin{aligned} \log(n!) &= \log(1) + \cdots + \log(n) = g(n) - g(1) + \log(n) \\ &= n(\log(n) - 1) + \frac{\log(n)}{2} + \sum_{d\ge 1} \frac{B_{2d}}{2d(2d-1)} \frac{1}{n^{2d-1}} + 1 - \sum_{d\ge 1} \frac{B_{2d}}{2d(2d-1)} \\ &= n(\log(n) - 1) + \frac{\log(n)}{2} + \sum_{d\ge 1} \frac{B_{2d}}{2d(2d-1)} \frac{1}{n^{2d-1}} + c \end{aligned}$$

per una opportuna costante c. Esponenziando si ottiene

$$n! = e^c \sqrt{n} \left(\frac{n}{e}\right)^n e^{\sum_{d\ge 1} \frac{B_{2d}}{2d(2d-1)} \frac{1}{n^{2d-1}}}$$

Dalla Formula di Stirling segue che $e^c = \sqrt{2\pi}$ e di conseguenza

$$n! = \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n e^{\sum_{d\ge 1} \frac{B_{2d}}{2d(2d-1)} \frac{1}{n^{2d-1}}} = \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n e^{\frac{1}{12n} - \frac{1}{360n^3} + \cdots}\,.$$

14. Numeri di Bernoulli e zeta di Riemann

In questa sezione dimostriamo che per ogni intero $n > 0$ vale

$$\zeta(2n) = -\frac{(-1)^n}{2}\frac{B_{2n}}{(2n)!}(2\pi)^{2n},$$

dove

$$\zeta(s) = \sum_{l>0}\frac{1}{l^s}$$

è la funzione zeta di Riemann.

Lemma 14.1. *Sia m un intero positivo dispari, allora*

$$\sin(x) = m\sin\left(\frac{x}{m}\right)\prod_{l=1}^{m/2}\frac{\sin^2(\frac{l\pi}{m}) - \sin^2(\frac{x}{m})}{\sin^2(\frac{l\pi}{m})}$$

Dimostrazione. Dalla formula

$$\cos(x) + i\sin(x) = (\cos(\frac{x}{m}) + i\sin(\frac{x}{m}))^m$$

segue che $\sin(x)$ è un polinomio di grado m in $\cos(\frac{x}{m})$ e $\sin(\frac{x}{m})$. Inoltre siccome m è dispari, in tale polinomio il coseno appare sempre con esponente pari, sostituendo $\cos^2$ con $1-\sin^2$ troviamo un polinomio $Q(z)$ di grado m tale che $\sin(x) = Q(\sin(\frac{x}{m}))$. Siccome $\sin(k\pi) = 0$ per ogni intero k, ne segue che gli m numeri reali distinti

$$\sin(\frac{l\pi}{m}), \qquad -\frac{m}{2} < l < \frac{m}{2}, \quad l \in \mathbb{Z},$$

annullano il polinomio Q e pertanto ne sono le radici. Esiste dunque una costante A tale che

$$Q(z) = A\prod_{-m/2<l<m/2}(z - \sin(\frac{l\pi}{m})) = Az\prod_{l=1}^{m/2}(z^2 - \sin^2(\frac{l\pi}{m})).$$

Dunque

$$\sin(x) = A\sin(\frac{x}{m})\prod_{l=1}^{m/2}(\sin^2(\frac{x}{m}) - \sin^2(\frac{l\pi}{m})), \tag{16}$$

Dividendo per x e passando al limite per $x \to 0$ si ottiene

$$1 = \frac{A}{m}\prod_{l=1}^{m/2}(-\sin^2(\frac{l\pi}{m})).$$

□

Prendiamo la derivata logaritmica dell'Equazione 16 e poi moltiplichiamo per x, otteniamo che per ogni $x \in (-\pi, \pi)$ vale

$$x\cot(x) = \frac{x}{m}\cot\left(\frac{x}{m}\right) + \sum_{l=1}^{m/2}\frac{\frac{2x}{m}\cos(\frac{x}{m})\sin(\frac{x}{m})}{\sin^2(\frac{x}{m}) - \sin^2(\frac{l\pi}{m})},$$

$$x\cot(x) = \frac{x}{m}\cot\left(\frac{x}{m}\right) + \sum_{l=1}^{m/2}\frac{2xm\cos(\frac{x}{m})\sin(\frac{x}{m})}{m^2\sin^2(\frac{x}{m}) - m^2\sin^2(\frac{l\pi}{m})}. \tag{17}$$

Notiamo che per ogni l ed ogni x si ha

$$\lim_{m\to\infty}\frac{x}{m}\cot\left(\frac{x}{m}\right) = 1, \qquad \lim_{m\to\infty}\frac{2xm\cos(\frac{x}{m})\sin(\frac{x}{m})}{m^2\sin^2(\frac{x}{m}) - m^2\sin^2(\frac{l\pi}{m})} = \frac{2x^2}{x^2 - l^2\pi^2}.$$

Lemma 14.2. *Siano date le successioni di numeri reali*

$$\{a_{l,m}\}, \qquad \{b_l\}, \qquad \{c_n\}, \qquad l, m > 0, \quad n \geq N,$$

con le seguenti proprietà:

(1) *Per ogni l vale $\lim_{m\to\infty} a_{l,m} = b_l$.*
(2) *Per ogni $l \geq N$ ed ogni m vale $|a_{l,m}| \leq c_l$.*

(3) $\sum_l c_l < \infty$.

Allora le serie $\sum_l a_{l,m}$ *e* $\sum_l b_l$ *sono assolutamente convergenti e*

$$\lim_{m\to\infty}(\sum_l a_{l,m}) = \sum_l b_l.$$

Dimostrazione. Si tratta di un classico risultato di analisi. Riportiamo la dimostrazione per completezza.

Chiaramente $|b_l| = \lim_m |a_{l,m}| \leq c_l$ per ogni $l \geq N$; dunque le serie $\sum_l a_{l,m}$ e $\sum_l b_l$ sono asolutamente convergenti. Sia $\epsilon > 0$ e scegliamo $A \geq N$ tale che $\sum_{l\geq A} c_l < \epsilon$. Allora per ogni m vale

$$|\sum_{l\geq A} a_{l,m}| < \epsilon, \qquad |\sum_{l\geq A} b_l| < \epsilon$$

e quindi

$$\left|\sum_l a_{l,m} - \sum_l b_l\right| < \left|\sum_{l<A} a_{l,m} - \sum_{l<A} b_l\right| + 2\epsilon$$

e per m sufficientemente grande il primo addendo del secondo membro può essere reso piccolo a piacere. $\square$

Teorema 14.3. *Per ogni* $x \in (-\pi, \pi)$ *vale*

$$x\cot(x) = 1 + \sum_{l>0} \frac{2x^2}{x^2 - l^2\pi^2}.$$

Dimostrazione. Sia x fissato; siccome entrambi i membri dell'equazione sono pari non è restrittivo supporre $x \geq 0$. Consideriamo la succesione

$$a_{l,m} = \begin{cases} \dfrac{2xm\cos(\frac{x}{m})\sin(\frac{x}{m})}{m^2\sin^2(\frac{x}{m}) - m^2\sin^2(\frac{l\pi}{m})} & \text{per } l < m/2, \\ \\ 0 & \text{per } l \geq m/2. \end{cases}$$

Ricordiamo che, per la convessità del seno si ha

$$\frac{2x}{\pi} \leq \sin(x) \leq x, \qquad \text{per ogni } x \in [0, \pi/2],$$

e quindi per ogni $l \geq 2$, $m > 2l$ vale

$$\left|2xm\cos\left(\frac{x}{m}\right)\sin\left(\frac{x}{m}\right)\right| \leq 2x^2 \leq 2\pi^2,$$

$$\left|m^2\sin^2\left(\frac{x}{m}\right) - m^2\sin^2\left(\frac{l\pi}{m}\right)\right| = m^2\sin^2(\frac{l\pi}{m}) - m^2\sin^2(\frac{x}{m}) \geq \frac{4}{\pi^2}l^2\pi^2 - x^2 \geq 4l^2 - \pi^2 \geq l^2.$$

Dunque $|a_{l,m}| \leq \frac{2\pi^2}{l^2}$ per ogni m ed ogni $l \geq 2$. Possiamo quindi passare al limite l'Equazione 17 e concludere la dimostrazione. $\square$

Possiamo riscrivere l'equazione del Teorema 14.3 come

$$x\cot(x) = 1 - \sum_{l>0} \frac{2x^2}{l^2\pi^2}\frac{1}{1-\frac{x^2}{l^2\pi^2}} = 1 - \sum_{l>0}\frac{2x^2}{l^2\pi^2}\sum_{n\geq 0}\frac{x^{2n}}{l^{2n}\pi^{2n}} = 1 - \sum_{n\geq 0}\frac{2x^{2n+2}}{\pi^{2n+2}}\sum_{l>0}\frac{1}{l^{2n+2}}.$$

Abbiamo dunque dimostrato che

$$x\cot(x) = 1 - 2\sum_{n>0}\frac{x^{2n}}{\pi^{2n}}\zeta(2n).$$

Possiamo trovare un'altra descrizione dello sviluppo in serie di $x\cot(x)$. Infatti

$$\begin{aligned} x\cot(x) &= ix\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{e^{ix}-e^{-ix}} = ix\frac{e^{2ix}+1}{e^{2ix}-1} \\ &= \frac{ix}{e^{2ix}-1}+\frac{ixe^{2ix}}{e^{2ix}-1} = \frac{ix}{e^{2ix}-1}-\frac{ix}{e^{-2ix}-1} = \frac{1}{2}(B(2ix)-B(-2ix)) \\ &= 1+\sum_{n>0}\frac{B_{2n}}{(2n)!}(2ix)^{2n} = 1+\sum_{n>0}\frac{B_{2n}}{(2n)!}2^{2n}(-1)^n x^{2n} \end{aligned}$$

Ne consegue che

$$\zeta(2n) = -\frac{(-1)^n}{2}\frac{B_{2n}}{(2n)!}(2\pi)^{2n}, \qquad B_{2n} = (-1)^{n+1}\frac{2(2n)!}{(2\pi)^{2n}}\zeta(2n).$$

Ad esempio

$$\zeta(2) = \frac{1}{2}\frac{B_2}{2!}(2\pi)^2 = B_2\pi^2 = \frac{\pi^2}{6}.$$

Siccome $\zeta(2)\ge\zeta(2n)\ge 1$ troviamo

$$2\frac{(2n)!}{(2\pi)^{2n}} \le |B_{2n}| \le \frac{\pi^2}{3}\frac{(2n)!}{(2\pi)^{2n}}.$$

Esercizio 47. Provare che per $x\in(-\pi,\pi)$ vale

$$\sin(x) = x\prod_{l>0}\left(1-\frac{x^2}{l^2\pi^2}\right).$$

(Suggerimento: le due funzioni sono dispari, hanno la stessa derivata in 0 e la stessa derivata logaritmica in $(0,\pi)$.)

Esercizio 48. Calcolare $\sin(\pi/2)$ usando l'Esercizio 47 e dedurre la formula di Wallis.

Esercizio 49. Utilizzare il risultato dell'Esercizio 47 per calcolare il prodotto

$$\prod_{l\in A}\frac{(2l-1)(2l+1)}{(2l)^2}$$

nei seguenti casi:

(1) $A = \{l\in\mathbb{N} \mid l>0 \text{ pari }\}$,
(2) $A = \{l\in\mathbb{N} \mid l>0 \text{ dispari }\}$.

15. Elementi di Lie e operatori aggiunti

Lavoreremo sul campo dei numeri reali anche se molti degli argomenti trattati valgono in maggiore generalità. Per algebra intenderemo un anello commutativo che è anche uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$. Un esempio di algebra è quello delle funzioni di classe C^∞ su un aperto di $\mathbb{R}$. Se H è un'algebra denoteremo con $M_n(H)$ lo spazio vettoriale delle matrici $n\times n$ a coefficienti in R. Se V è uno spazio vettoriale indicheremo con $\mathrm{End}(V)$ lo spazio vettoriale di tutte le applicazioni lineari $V\to V$; il prodotto di composizione in $\mathrm{End}(V)$ è associativo.

Sia V uno spazio vettoriale, per ogni $A,B\in\mathrm{End}(V)$ denotiamo

$$[A,B] = AB-BA.$$

Si noti che $[B,A]=-[A,B]$, che l'applicazione $(A,B)\mapsto[A,B]$ è bilineare e vale la cosiddetta *identità di Jacobi*:

$$[[A,B],C] = [A,[B,C]]-[B,[A,C]]\,.$$

Definizione 15.1. Un sottospazio vettoriale $W\subset\mathrm{End}(V)$ si dice *sottoalgebra di Lie* se per ogni $A,B\in W$ vale $[A,B]\in W$.

Ad esempio gli operatori a traccia nulla sono una sottoalgebra di Lie di $\mathrm{End}(\mathbb{R}^n)$.

Dati due sottospazi vettoriali $Z,W\subset\mathrm{End}(V)$ denotiamo con $[Z,W]$ il sottospazio vettoriale generato da tutti i vettori del tipo $[z,w]$, al variare di $z\in Z$ e $w\in W$. Si pone poi

$$Z^1 = Z,\quad Z^2=[Z,Z]=[Z,Z^1],\quad Z^n=[Z,Z^{n-1}]\,.$$

Lemma 15.2. *Per ogni $n, m > 0$ vale $[Z^n, Z^m] \subset Z^{n+m}$.*

Dimostrazione. Induzione su n, essendo il risultato vero per definizione quando $n = 1$. Supponiamo $n > 1$; siccome ogni elemento di Z^n è combinazione lineare di elementi del tipo $[z, v]$, con $z \in Z$ e $v \in Z^{n-1}$ basta dimostrare che

$$[[z, v], w] \in Z^{n+m} \qquad \text{per ogni} \quad z \in Z,\ v \in Z^{n-1},\ w \in Z^m.$$

Per l'identità di Jacobi vale

$$[[z, v], w] = [z, [v, w]] - [v, [z, w]],$$

mentre per l'ipotesi induttiva

$$[z, [v, w]] \in [Z, [Z^{n-1}, Z^m]] \subset [Z, Z^{n+m-1}] \subset Z^{n+m},$$

$$[v, [z, w]] \in [Z^{n-1}, [Z, Z^m]] \subset [Z^{n-1}, Z^{m+1}] \subset Z^{n+m}.$$

□

Definizione 15.3. Chiameremo i vettori di Z^n *elementi di Lie* di peso n di Z.

Dato $A \in \operatorname{End}(V)$ definiamo l'operatore lineare (detto operatore aggiunto)

$$\operatorname{ad} A\colon \operatorname{End}(V) \to \operatorname{End}(V), \qquad \operatorname{ad} A(B) = [A, B]\ .$$

Il prossimo lemma descrive gli effetti delle iterazioni di un operatore aggiunto.

Lemma 15.4. *Per ogni $A, B \in \operatorname{End}(V)$ ed ogni intero $n \geq 0$ vale*

$$(\operatorname{ad} A)^n B = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{n}{i} A^{n-i} B A^i = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} A^{n-i} B (-A)^i.$$

Dimostrazione. Abbiamo

$$(\operatorname{ad} A)^n B = A (\operatorname{ad} A)^{n-1}(B) - (\operatorname{ad} A)^{n-1}(B) A$$

e per induzione

$$(\operatorname{ad} A)^n B = \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i \binom{n-1}{i} A^{n-i} B A^i - \sum_{j=0}^{n-1} (-1)^j \binom{n-1}{i} A^{n-1-j} B A^{j+1}.$$

Ponendo $j = i - 1$ sulla seconda sommatoria

$$(\operatorname{ad} A)^n B = \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i \binom{n-1}{i} A^{n-i} B A^i + \sum_{i=1}^{n} (-1)^i \binom{n-1}{i-1} A^{n-i} B A^i =$$

$$= \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \left(\binom{n-1}{i} + \binom{n-1}{i-1} \right) A^{n-i} B A^i = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{n}{i} A^{n-i} B A^i.$$

□

16. Esponenziale e logaritmo di matrici

Data una matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$ deefiniamo la sua norma pensandola come un vettore di $\mathbb{R}^{n^2}$, ossia se $A = (a_{ij})$, allora

$$\|A\| = \sqrt{\sum_{i,j} a_{ij}^2}.$$

Per la disuguaglianza triangolare si ha $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$. Vale inoltre la formula $\|AB\| \leq \|A\|\|B\|$ (e di conseguenza $\|A^k\| \leq \|A\|^k$): infatti se $A = (a_{ij})$ e $B = (b_{ij})$ si ha

$$\|AB\|^2 = \sum_{i,j} (\sum_k a_{ik} b_{kj})^2;$$

Il termine $\sum_k a_{ik} b_{kj}$ è il prodotto scalare di due vettori, per la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz

$$(\sum_k a_{ik} b_{kj})^2 \leq (\sum_s a_{is}^2)(\sum_r b_{rj}^2)$$

e quindi

$$\|AB\|^2 \le \sum_{i,j}\left(\sum_s a_{is}^2\right)\left(\sum_r b_{rj}^2\right) = \left(\sum_{i,s} a_{is}^2\right)\left(\sum_{r,j} b_{rj}^2\right) = \|A\|^2\|B\|^2.$$

Ne consegue che il valore assoluto di ogni coefficiente di A^n è maggiorato da $\|A\|^n$ e quindi:

(1) La serie $\displaystyle\sum_{n\ge 0}\frac{A^n}{n!}$ è totalmente convergente per ogni matrice A.

(2) La serie $\displaystyle\sum_{n>0}\frac{A^n}{n}$ è totalmente convergente per ogni matrice A tale che $\|A\| < 1$.

In analogia con il caso di una variabile denoteremo

$$e^A = \sum_{n\ge 0}\frac{A^n}{n!}, \qquad \log(I-A) = -\sum_{n>0}\frac{A^n}{n}.$$

Notiamo che $\|e^A\| \le e^{\|A\|}$ e che $\|e^A - I\| \le e^{\|A\|} - 1$. Osserviamo anche che le componenti dell'applicazione esponenziale

$$M_n(\mathbb{R}) \to M_n(\mathbb{R}), \quad A \mapsto e^A,$$

sono serie di potenze, quindi funzioni analitiche, quindi di classe C^∞. Ne segue che se $t \mapsto A(t)$, $t \in \mathbb{R}$, è un'applicazione C^∞, allora anche $t \mapsto e^{A(t)}$ è di classe C^∞.

Si ha

$$(e^{tA})' = \frac{d}{dt}\sum \frac{t^n}{n!}A^n = \sum \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}A^n = Ae^{tA}.$$

ATTENZIONE: è generalmente falso che $(e^{A(t)})' = A(t)'e^{A(t)}$. Si consideri ad esempio la matrice

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad A(t)' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Siccome $A(t)^n = A(t)$ per ogni $n > 0$ si ha

$$e^{A(t)} = \begin{pmatrix} 1 & t(e-1) \\ 0 & e \end{pmatrix}, \qquad (e^{A(t)})' = \begin{pmatrix} 0 & e-1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \ne \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & e \end{pmatrix} = A(t)'e^{A(t)}.$$

Lemma 16.1. *Se $\|A\| < \log 2$ allora $\log(e^A) = A$. In particolare l'applicazione esponenziale è iniettiva in un intorno di 0.*

Dimostrazione. La funzione $\log(e^{tA}) = \log(1-(1-e^{tA})) = -\sum_{n>0}\frac{(1-e^{tA})^n}{n}$ è derivabile per $t \in [0,1]$, vale 0 per $t = 0$ e la sua derivata è

$$\log(e^{tA})' = -\sum_{n\ge 0} -Ae^{tA}(1-e^{tA})^n = Ae^{tA}\frac{1}{1-(1-e^{tA})} = A.$$

□

17. La formula di derivazione

Vogliamo adesso trovare una formula per la derivata di $e^{A(t)}$; supponiamo per semplicità che $A(t)$ sia di classe C^∞ su un intervallo aperto $U \subset \mathbb{R}$, anche se il risultato vale in maggiore generalità. Abbiamo già osservato che anche $e^{A(t)}$ è di classe C^∞ su U.

Teorema 17.1. *Sia $A(t)$ una matrice a coefficienti funzioni C^∞ in un intervallo aperto U, allora vale la formula*

$$(e^{A(t)})'e^{-A(t)} = \frac{e^{\operatorname{ad} A(t)} - 1}{\operatorname{ad} A(t)}A(t)' = \sum_{m\ge 0}\frac{(\operatorname{ad} A(t))^m A(t)'}{(m+1)!}.$$

Inoltre

$$A(t)' = \sum_{m\ge 0}\frac{B_m}{m!}(\operatorname{ad} A(t))^m[(e^{A(t)})'e^{-A(t)}],$$

dove i B_m sono i numeri di Bernoulli.

Dimostrazione. Sia $n > 0$ l'ordine della matrice $A(t)$; indichiamo con $H = C^\infty(U)$ l'algebra delle funzioni C^∞ su U e con H^n lo spazio vettoriale delle n-uple di funzioni C^∞. Con il prodotto righe per colonna lo spazio $M_n(H)$ è immerso in $\mathrm{End}(H^n)$: anziché dimostrare che l'uguaglianza del teorema vale in $M_n(H)$, dimostriamo che vale nell'algebra associativa $\mathrm{End}(H^n)$.

Lo spazio $\mathrm{End}(H^n)$ contiene anche l'operatore di derivazione D:

$$D(f_1, \ldots, f_n) = (f_1', \ldots, f_n'), \qquad D \in \mathrm{End}(H^n).$$

dalla regola di Leibniz segue che per ogni $B(t) \in M_n(H)$ e per ogni $F(t) \in H^n$ vale

$$D(B(t)F(t)) = B(t)'F(t) + B(t)D(F(t)),$$

e quindi vale $B(t)' = [D, B(t)]$ in $\mathrm{End}(H^n)$.

Dunque

$$e^{A(t)}De^{-A(t)} = \sum_{k,s\geq 0} \frac{A(t)^k}{k!} D \frac{(-A(t))^s}{s!},$$

ponendo $m = k + s$ e applicando il Lemma 15.4 troviamo

$$e^{A(t)}De^{-A(t)} = \sum_{m\geq 0} \frac{1}{m!} \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} A(t)^k D(-A(t))^s = \sum_{m\geq 0} \frac{(\mathrm{ad}\, A(t))^m}{m!} D =$$

$$= D + \sum_{m\geq 0} \frac{(\mathrm{ad}\, A(t))^m}{(m+1)!} [A(t), D] = D - \sum_{m\geq 0} \frac{(\mathrm{ad}\, A(t))^m}{(m+1)!} A(t)'.$$

Quindi

$$D - e^{A(t)}De^{-A(t)} = \sum_{m\geq 0} \frac{(\mathrm{ad}\, A(t))^m}{(m+1)!} A(t)'$$

e moltiplicando a destra per $e^{A(t)}$

$$(e^{A(t)})' = [D, e^{A(t)}] = \left(\sum_{m\geq 0} \frac{(\mathrm{ad}\, A(t))^m}{(m+1)!} A(t)' \right) e^{A(t)}.$$

Ricordiamo che i numeri di Bernoulli B_m sono definiti dallo sviluppo in serie $\dfrac{x}{e^x - 1} = \displaystyle\sum_{m\geq 0} \frac{B_m}{m!} x^n$

e quindi l'operatore

$$\sum_{m\geq 0} \frac{B_m}{m!} (\mathrm{ad}\, A(t))^m \in \mathrm{End}(H^n)$$

è l'inverso di

$$\frac{e^{\mathrm{ad}\, A(t)} - 1}{\mathrm{ad}\, A(t)}.$$

Quindi

$$A(t)' = \left(\sum_{m\geq 0} \frac{B_m}{m!} (\mathrm{ad}\, A(t))^n \right) \frac{e^{\mathrm{ad}\, A(t)} - 1}{\mathrm{ad}\, A(t)} A(t)' = \sum_{m\geq 0} \frac{B_m}{m!} (\mathrm{ad}\, A(t))^m [(e^{A(t)})' e^{-A(t)}].$$

□

18. La formula di Baker-Campbell-Hausdorff

Siano $A, C \in M_n(\mathbb{R})$, allora per $t, s \in \mathbb{R}$ sufficientemente vicini a 0 è ben definito $\log(e^{tA}e^{sC})$.

Teorema 18.1. *Nelle notazioni precedenti vale*

$$\log(e^{tA}e^{sC}) = \sum_{i+j>0} t^i s^j Z_{ij},$$

dove $Z_{ij} \in M_n(\mathbb{R})$ è un elemento di Lie di peso $i + j$ dello spazio generato da A, C.

Seguirà dalla dimostrazione che gli elementi Z_{ij} si possono calcolare mediante una formula ricorsiva. I primi termini della serie (peso ≤ 3) sono:

$$\log(e^{tA}e^{sC}) = tA + sC + \frac{ts}{2}[A, C] + \frac{t^2 s}{12}[A, [A, C]] + \frac{ts^2}{12}[C, [C, A]] + \cdots$$

Dimostrazione. Indichiamo con $Z = \log(e^{tA}e^{sC})$, allora per il Lemma 16.1

$$e^Z = e^{tA}e^{sC}, \qquad Z(0,s) = sC.$$

Derivando rispetto a t e applicando la formula di derivazione si ottiene

$$\frac{\partial Z}{\partial t} = \sum_{m\geq 0} \frac{B_m}{m!}(\operatorname{ad} Z)^m \left[\frac{\partial e^Z}{\partial t}e^{-Z}\right]$$

e siccome

$$\frac{\partial e^Z}{\partial t}e^{-Z} = Ae^{tA}e^{sC}e^{-sC}e^{-tA} = A$$

otteniamo

$$\frac{\partial Z}{\partial t} = \sum_{m\geq 0} \frac{B_m}{m!}(\operatorname{ad} Z)^m A\ .$$

Se scriviamo inoltre $Z(t,s) = \sum_{m\geq 0} Z_m(s)t^m$ si ha $Z_0 = sC$; eguagliando i coefficienti di t^0 abbiamo

$$Z_1 = \sum_{m\geq 0} \frac{B_m}{m!}(\operatorname{ad} Z_0)^m A = \sum_{m\geq 0} \frac{B_m s^m}{m!}(\operatorname{ad} C)^m A = A - \frac{s}{2}[C,A] + \frac{s^2}{12}[C,[C,A]] + \cdots ,$$

e più in generale, eguagliando i coefficienti di t^r si ha

$$Z_{r+1} = \frac{1}{r+1}\sum_{m\geq 0} \frac{B_m}{m!} \sum_{i_1+\cdots+i_m=r} (\operatorname{ad} Z_{i_1})(\operatorname{ad} Z_{i_2})\cdots(\operatorname{ad} Z_{i_m})A$$

Per concludere la dimostrazione bisogna dimostrare che il coefficiente di s^d in Z_r è di Lie di peso $d+r$. Per $r=0$ ci siamo; proseguiamo per induzione su r. Se scriviamo $Z_i = \sum_j Z_{ij}s^j$ la precedente formula ricorsiva diventa

$$Z_{r+1,d} = \frac{1}{r+1}\sum_{m\geq 0} \frac{B_m}{m!} \sum_{i_1+\cdots+i_m=r}\ \sum_{j_1+\cdots+j_m=d} (\operatorname{ad} Z_{i_1j_1})(\operatorname{ad} Z_{i_2j_2})\cdots(\operatorname{ad} Z_{i_mj_m})A$$

ed ogni addendo $(\operatorname{ad} Z_{i_1j_1})(\operatorname{ad} Z_{i_2j_2})\cdots(\operatorname{ad} Z_{i_mj_m})A$ è di Lie di peso $r+d+1$. $\square$