

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PISA

FACOLTÀ DI SCIENZE MATEMATICHE, FISICHE E NATURALI

TESI DI LAUREA IN MATEMATICA

Discussa il 13 Luglio 1989

SINGOLARITÀ QUOZIENTI E DEGENERAZIONI DI SUPERFICI RAZIONALI

CANDIDATO

Marco Manetti

RELATORE

Chiar.mo Prof. Fabrizio Catanese

CONTRORELATORE

Chiar.mo Prof. Corrado De Concini

ANNO ACCADEMICO 1988-1989

INTRODUZIONE

Uno dei metodi classici della scuola Italiana di geometria algebrica è stato quello di degenerazione, tale metodo è stato applicato per primo con successo da G. Castelnuovo per dimostrare alcune proprietà delle serie lineari sulle curve algebriche a moduli generali.

D'altra parte quando i geometri Italiani, ad esempio F. Severi, hanno cercato di applicare il metodo di degenerazione allo studio delle superfici algebriche si sono scontrati con difficoltà tecniche insormontabili per l'ancora inadeguato sviluppo degli strumenti algebrici e topologici adatti a trattare le singolarità che si ottengono degenerando superfici non singolari.

Scopo di questa tesi è quello di affrontare il problema della determinazione delle degenerazioni normali proiettive di superfici razionali, con particolare riguardo al caso del piano proiettivo.

Tale problema si inquadra in un contesto più generale, quale quello di studiare le degenerazioni proiettive di superfici algebriche, e si collega, arrecando anche qualche contributo, al problema di completare la classificazione di Enriques-Kodaira per le superfici normali, problema recentemente portato avanti dalla scuola Giapponese, in particolare da F. Sakai ([Sa]).

Osserviamo d'altronde come il problema delle degenerazioni ad un parametro di superfici si lega al problema della classificazione delle varietà di dimensione 3 (cf. Kollàr e Shepherd-Barron [K-S]).

Dopo gli esempi di Francia ([Fr]) i quali dimostrano che i modelli minimali devono essere singolari, M. Reid ha proposto le nozioni di singolarità canonica e terminale (cf. Reid [R]), permettendo così di ottenere attraverso i lavori di Y. Kawamata, S. Mori, J. Kollàr, Reid stesso e altri ancora, risultati consistenti nel programma di classificare le varietà tridimensionali.

Nella presente tesi, in particolare nel terzo capitolo, otteniamo per via differente e più esplicita alcuni recenti risultati di Kollàr e Shepherd-Barron ([K-S]) concernenti gli smoothing terminali di singolarità quozienti.

Un ulteriore motivo di interesse è comparso nei lavori di Catanese ([C]) in cui l'analisi di degenerazioni di superfici razionali è stata applicata allo studio della chiusura di certi aperti in spazi di moduli di superfici, ed i risultati della presente tesi possono essere applicati in questa direzione.

Hirzebruch e Kodaira ([H-K]) hanno dimostrato che ogni deformazione di \mathbb{P}^2 è ancora \mathbb{P}^2 mentre Yau ([Y]) ha dimostrato che su una 4-varietà orientabile omeomorfa a \mathbb{P}^2 esiste un'unica struttura complessa e quindi il problema delle degenerazioni lisce di \mathbb{P}^2 è completamente risolto. Ciò si esprime dicendo che \mathbb{P}^2 è fortemente rigido.

La situazione diventa più complicata, anche nel caso liscio, quando si considera $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$, infatti le deformazioni in grande di $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ includono le superfici \mathbb{F}_{2n} studiate da C. Segre ([Se]) dal punto di vista proiettivo e astrattamente descritte da Hirzebruch.

La possibilità di classificare le degenerazioni lisce di \mathbb{P}^2 e $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ ci induce quindi a pensare che le degenerazioni normali proiettive di queste superfici possano essere classificate in maniera abbastanza esplicita.

Consideriamo il seguente contesto, sia $\Delta \subset \mathbb{C}$ il disco unitario, X uno spazio complesso tridimensionale e $f: X \rightarrow \Delta$ un morfismo olomorfo, proiettivo, piatto, liscio su Δ^* e tale che $X_0 = f^{-1}(0)$ sia una superficie normale e X_t una superficie razionale.

Badescu ([B]) si è posto in questo contesto e ha dato una prima classificazione di tali degenerazioni riportata in questa tesi al §IV.2.

Riguardo al caso $X_t \cong \mathbb{P}^2$ Badescu ha costruito una famiglia di degenerazioni normali proiettive di \mathbb{P}^2 descritta nel seguente esempio.

Esempio 1. Per ogni curva liscia $Y \subset \mathbb{P}^2$ di grado n e genere $(n-1)(n-2)/2$ consideriamo l'immersione $i: \mathbb{P}^2 \rightarrow \mathbb{P}^N$, $N = n(n+3)/2$, determinata dal sistema lineare completo $|Y|$.

Sia $C(\mathbb{P}^2, i) \subset \mathbb{P}^{N+1}$ il cono proiettivo su \mathbb{P}^2 e sia (x_0, \dots, x_N, s) un sistema di coordinate omogenee di \mathbb{P}^{N+1} tale che $\mathbb{P}^N = \{s = 0\}$, $Y = \mathbb{P}^2 \cap H$ dove $H = \{x_0 = s = 0\}$ ed il vertice del cono ha coordinata $(0, \dots, 0, 1)$.

Consideriamo allora $f: X \rightarrow \mathbb{C}$ dove X è il sottoinsieme di $\mathbb{P}^{N+1} \times \mathbb{C}$ definito da

$$X = \{(x, s, t) \in \mathbb{P}^{N+1} \times \mathbb{C} \mid x_0 = ts, (x, s) \in C(\mathbb{P}^2, i)\}$$

e f è la restrizione a X della proiezione sul secondo fattore.

Si dimostra facilmente che $X_t \cong \mathbb{P}^2$ se $t \neq 0$ mentre X_0 è il cono proiettivo sulla curva Y immersa in $H \cong \mathbb{P}^{N-1}$.

La mancanza di ulteriori esempi ha indotto Badescu a considerare il seguente problema ([B] Problem 4.8.2).

Problema 1. È vero che le uniche degenerazioni normali proiettive di \mathbb{P}^2 sono, a meno di isomorfismo, quelle descritte nell'Esempio 1?

I principali risultati dimostrati in questa tesi sono i seguenti:

- 1) Si dà, contrariamente ai sospetti di Badescu, una risposta negativa al Problema 1 esibendo un controesempio (§V.3).
- 2) Si dà, sotto ipotesi sul tipo di singolarità presenti in X_0 , una descrizione esplicita, mediante condizioni necessarie assai restrittive, delle degenerazioni normali proiettive di \mathbb{P}^2 .

È naturale sospettare che gli esempi possibili di degenerazioni normali proiettive di \mathbb{P}^2 siano molti di più, d'altra parte i risultati di questa tesi aprono la prospettiva di una classificazione completa ma non così ristretta come si poteva sperare.

Nonostante il problema sia formulato nell'ambito della geometria proiettiva i metodi usati sono in gran parte topologici e si appoggiano sulla teoria, fondata da Artin ([A1],[A2]), Mumford ([Mu]) e soprattutto Milnor ([M]), delle singolarità razionali e dei loro smoothing, teoria recentemente sviluppata con notevole successo da molti geometri fra cui Steenbrink ([St]), Looijenga e Wahl ([L-W],[W]).

Naturalmente vengono usati anche i metodi standard di geometria algebrica e di teoria delle deformazioni, in particolare hanno un ruolo fondamentale i rivestimenti ciclici diramati in codimensione ≥ 2 e le relazioni fra deformazioni locali e globali di spazi analitici.

Vediamo adesso capitolo per capitolo quali sono i principali contenuti della tesi.

Capitolo I. Vengono precisate alcune definizioni e vengono esposte alcune proprietà necessarie per affrontare i capitoli seguenti.

Capitolo II. È interamente dedicato allo studio dei rivestimenti ciclici di varietà e singolarità normali. Si tratta di uno strumento tecnico già usato da H. Esnault, E. Viehweg ([E-V]), M. Reid ([R]) e le cui applicazioni vanno molto al di là dell'uso fatto in questa tesi.

Viene introdotto il concetto di indice di un divisore \mathbb{Q} -Cartier (divisore di Weil per cui esiste un multiplo intero localmente principale) e si definisce il rivestimento ciclico di una singolarità normale associato ad un divisore \mathbb{Q} -Cartier le cui proprietà principali sono dimostrate nel Teorema II.3.1.

Capitolo III. Nella prima parte (§1 e 2) sono riassunte le definizioni e le proprietà principali delle deformazioni e della fibra di Milnor di uno smoothing.

La seconda parte (§3 e 4) è originale e concerne lo studio degli smoothing di

singularità normali di dimensione 2 e dei loro rivestimenti ciclici diramati sopra il punto singolare.

Il risultato chiave è il Teorema III.3.7 nel quale si dimostra la stabilità degli smoothing di singularità quozienti rispetto ai rivestimenti ciclici associati a divisori \mathbb{Q} -Cartier: tale risultato permette tra l'altro, grazie anche ai risultati di Catanese ([C]) sugli automorfismi dei punti doppi razionali, di trovare una dimostrazione alternativa di un recente risultato di Kollàr e Shepherd-Barron riguardante la classificazione degli smoothing \mathbb{Q} -Gorenstein, cioè con il divisore canonico \mathbb{Q} -Cartier, di singularità quozienti (Teorema III.4.1 e Oss. III.4.2).

Capitolo IV. Inizia in questo capitolo l'argomento centrale della tesi, cioè lo studio delle degenerazioni di superfici razionali.

Nella prima parte (§1 e 2) fissiamo le notazioni ed esponiamo il lavoro di Badescu i cui principali risultati riguardano l'annullamento dei plurigeneri della fibra singolare X_0 quando l'autointersezione del canonico sulla fibra generica è non negativa (Proposizione IV.2.3) e la classificazione delle superfici normali proiettive con irregolarità 0 e dimensione di Kodaira $-\infty$ (Teorema IV.2.4 e Teorema IV.2.6).

Il resto del capitolo è indirizzato (con risultati in parte originali) ad un raffinamento della classificazione di Badescu nel caso in cui le singularità di X_0 sono razionali. Per i risultati di Mumford ([Mu]) e Artin ([A1]) ogni divisore di Weil su una superficie normale proiettiva con al più singularità razionali è \mathbb{Q} -Cartier ed è quindi possibile definire un prodotto di intersezione sul gruppo delle classi a valori in \mathbb{Q} . Lo studio di tale prodotto su X_0 è fonte di ulteriori informazioni sulla geometria delle degenerazioni come ad esempio la Proposizione IV.3.1 che confronta le autointersezioni di divisori di Weil sulla fibra centrale e generica.

Per ogni singularità razionale di dimensione due (Z, p) si introduce un invariante $\beta(p) \in \mathbb{Q}$ che misura essenzialmente $\omega_Y^2 - \omega_Z^2$ dove Y è la risoluzione minimale di

Z . L'introduzione di tale invariante permette di trovare tramite la Formula IV.3.0 alcune condizioni necessarie sulla fibra centrale.

Capitolo V. In questo capitolo, completamente originale, sono dimostrati i risultati 1) e 2) precedentemente esposti.

I risultati chiave sono il Corollario V.1.2 per il quale ogni degenerazione normale proiettiva di \mathbb{P}^2 è \mathbb{Q} -Gorenstein e la Proposizione V.2.1 secondo cui se le singolarità di X_0 sono razionali il numero di Milnor dello smoothing indotto dalla degenerazione deve essere 0.

In base a questo e ai risultati dei capitoli precedenti si dimostrano, con metodi topologici, i principali teoremi di classificazione (Teorema V.2.2 e Teorema V.2.4) validi nella ipotesi che le singolarità di X_0 siano quozienti.

Il capitolo si conclude con due esempi, il primo di una degenerazione normale proiettiva di \mathbb{P}^2 e risponde al Problema 1, il secondo di una degenerazione normale proiettiva di $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ e mostra come anche in questo caso non si può sperare in una classificazione ristretta di tali degenerazioni.

Vorrei infine esprimere un sincero ringraziamento al Professor Fabrizio Catanese per il suo impegno e interesse costante verso l'argomento e per l'aiuto datomi in più di una occasione, al Professor Corrado De Concini per aver cordialmente accettato di farmi da controrelatore ed alla dottoressa Barbara Fantechi per il sostegno pratico e morale ricevuto durante la scrittura della tesi.

INDICE

Introduzione	i
Indice	vii
Capitolo I: Preliminari.		
§ 1 Spazi normali	1
§ 2 Il fascio canonico	4
§ 3 Fibrazioni a fibra \mathbb{P}^n	6
§ 4 Singolarità quozienti e punti doppi razionali	9
Capitolo II: Rivestimenti ciclici di singolarità.		
§ 1 Fasci G-linearizzati e varietà quozienti	13
§ 2 Rivestimenti ciclici non diramati	16
§ 3 Rivestimenti ciclici di singolarità normali	17
§ 4 Rivestimenti ciclici globali	20
Capitolo III: Deformazioni e numero di Milnor.		
§ 1 Deformazioni di singolarità analitiche	22
§ 2 Generalità sulla fibra di Milnor	24
§ 3 Quozienti e rivestimenti ciclici di smoothing	27
§ 4 Smoothing \mathbb{Q} -Gorenstein di singolarità quozienti	35
Capitolo IV: Degenerazioni di superfici razionali.		
§ 1 Generalità sulle degenerazioni	48
§ 2 Degenerazioni normali proiettive di superfici razionali	51
§ 3 Degenerazioni con singolarità razionali	54
§ 4 Combinatoria delle singolarità cicliche	59
Capitolo V: Degenerazioni normali proiettive di \mathbb{P}^2.		
§ 1 Primi risultati sulle degenerazioni di \mathbb{P}^2	65
§ 2 Un teorema di classificazione	69

§ 3	Un esempio di degenerazione normale proiettiva di \mathbb{P}^2	75
§ 4	Un esempio di degenerazione normale proiettiva di $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$	81
Bibliografia		85

Capitolo I : Preliminari

§1 . Spazi normali

Sia X uno spazio complesso ridotto di dimensione pura n , \mathcal{O}_X il suo fascio strutturale, $S(X)$ l'insieme dei suoi punti singolari. Indichiamo con $U = X - S(X)$ l'insieme aperto dei punti regolari e con $i: U \rightarrow X$ l'immersione naturale.

Ricordiamo che X si dice normale se per ogni $x \in X$ l'anello $\mathcal{O}_{X,x}$ è integralmente chiuso, in particolare normale \Rightarrow localmente irriducibile .

Per lo studio degli spazi normali i seguenti teoremi hanno importanza fondamentale.

Teorema 1.1. Se X è normale allora $S(X)$ ha codimensione ≥ 2 .

Teorema 1.2. Nelle notazioni introduttive sono fatti equivalenti:

- i) X è normale
- ii) $i_*\mathcal{O}_U = \mathcal{O}_X$

La dimostrazione si può trovare ad esempio in [F].

Nel seguito del paragrafo supporremo sempre che X sia normale.

Definizione 1.1. Un \mathcal{O}_X -modulo \mathcal{F} si dice *saturo* se $i_*i^*\mathcal{F} = \mathcal{F}$

Lemma 1.3. siano \mathcal{F}, \mathcal{G} due \mathcal{O}_X -moduli localmente di tipo finito, $\phi: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ un morfismo. Se \mathcal{F} e \mathcal{G} sono saturi allora $i_*i^*\phi = \phi$.

DIM. La dimostrazione è divisa in tre passi.

Cominciamo con \mathcal{F} e \mathcal{G} localmente liberi

Se \mathcal{F} ha rango p e \mathcal{G} ha rango q allora localmente ϕ è rappresentato da una matrice $q \times p$ a coefficienti funzioni oloedorme e la tesi segue dalla normalità di X .

Se \mathcal{F} è localmente di tipo finito abbiamo localmente una successione esatta

$$\mathcal{O}^p \xrightarrow{\pi} \mathcal{F} \longrightarrow 0$$

Adesso applichiamo il funtore i_*i^* e otteniamo un diagramma commutativo dove le frecce verticali sono gli isomorfismi naturali

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}^p & \xrightarrow{\pi} & \mathcal{F} & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow \wr & & \downarrow \wr & & \\ i_*i^*\mathcal{O}^p & \xrightarrow{i_*i^*\pi} & i_*i^*\mathcal{F} & & \end{array}$$

Di conseguenza $i_*i^*\pi = \pi$.

Consideriamo ora il caso generale, abbiamo localmente un diagramma commutativo

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}^p & \xrightarrow{\pi_1} & \mathcal{F} & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow \psi & & \downarrow \phi & & \\ \mathcal{O}^q & \xrightarrow{\pi_2} & \mathcal{G} & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

appliciamo il funtore i_*i^* e usando quanto dimostrato nei passi precedenti ottengo $i_*i^*\phi = \phi$

□

Proposizione 1.4. Se \mathcal{F} e \mathcal{G} sono \mathcal{O}_X -moduli coerenti saturi, allora $\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ è coerente e saturo.

DIM. Dato un aperto $V \subset X$ per il Lemma 1.3 abbiamo un isomorfismo naturale

$$\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_{U \cap V}}(\mathcal{F}_{U \cap V}, \mathcal{G}_{U \cap V}) \cong \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_V}(\mathcal{F}_V, \mathcal{G}_V)$$

e la tesi segue dalla definizione del funtore $\mathcal{H}om$.

□

Se \mathcal{F} è un \mathcal{O}_X -modulo indichiamo con $\mathcal{F}^\vee = \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{O}_X)$ il suo duale.

Definizione 1.2. Un \mathcal{O}_X -modulo coerente \mathcal{F} si dice *riflessivo* se $\mathcal{F} = \mathcal{F}^{\vee\vee}$

Lemma 1.5. Se \mathcal{F} è un \mathcal{O}_X -modulo coerente valgono:

- i) $i^*\mathcal{F}^\vee = (i^*\mathcal{F})^\vee$
- ii) $i_*i^*\mathcal{F}^\vee = \mathcal{F}^\vee$

DIM. i) Segue immediatamente osservando le spighe dei fasci in questione nei punti di U .

ii) Localmente è data una successione esatta

$$\mathcal{O}^q \xrightarrow{\phi} \mathcal{O}^p \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow 0$$

e dualizzando otteniamo una successione esatta

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}^\vee \longrightarrow \mathcal{O}^p \xrightarrow{\phi^\vee} \mathcal{O}^q$$

A questa successione applichiamo il funtore i_*i^* che è esatto a sinistra e la tesi si ottiene applicando il Lemma 1.3 al morfismo ϕ^\vee .

□

Se consideriamo i biduali abbiamo per ogni \mathcal{F} coerente

$$\mathcal{F}^{\vee\vee} = i_*(i^*\mathcal{F})^{\vee\vee} = i_*i^*\mathcal{F}^{\vee\vee}$$

In particolare riflessivo \Rightarrow saturo, saturo e riflessivo su $U \Rightarrow$ riflessivo.

Consideriamo un divisore di Weil D in X , cioè una combinazione lineare localmente finita a coefficienti interi di sottovarietà analitiche irriducibili di codimensione 1, ad esso associamo il fascio di \mathcal{O}_X -moduli $\mathcal{O}(D)$ definito nel modo seguente

$$\mathcal{O}(D)(V) = \{f \in \mathcal{M}(V) \mid (f) + D \geq 0 \text{ in } V\} \quad \forall V \subset X \text{ aperto}$$

dove \mathcal{M} è il fascio delle funzioni meromorfe e $(f) = \overline{(f|_U)}$ è il divisore associato alla funzione meromorfa f

Corollario 1.6. Siano D, E divisori di Weil in X , allora:

- 1) $\mathcal{O}(D)$ è riflessivo.
- 2) $\mathcal{O}(D)^\vee = \mathcal{O}(-D)$
- 3) $\mathcal{O}(D + E) = (\mathcal{O}(D) \otimes \mathcal{O}(E))^{\vee\vee}$
- 4) $\text{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{O}(D), \mathcal{O}(E)) = \mathcal{O}(E - D)$

DIM. Segue dal Lemma 1.5 e dalle corrispondenti proprietà dei divisori nelle varietà lisce.

□

§2 . Il fascio canonico

Sia X uno spazio normale, $i: U \rightarrow X$ l'aperto dei punti regolari e Ω_U^n il fascio delle n -forme differenziali su U .

Definiamo il fascio canonico ω_X .

$$\omega_X = i_* \Omega_U^n$$

Si tratta di un fascio coerente, infatti per il Lemma 1.5 possiamo scrivere

$$\omega_X = \left(\bigwedge^n \Omega_X \right)^{\vee\vee}$$

dove Ω_X è il fascio (coerente) dei differenziali di X (cf [H] II.8, [F],[Lo]).

Definizione 2.1. Un divisore di Weil in X si dice *canonico* se è il divisore associato ad una sezione meromorfa del fascio canonico.

Un divisore canonico su X si indica generalmente con K_X .

Osservazione 2.1. Se X è proiettiva, e quindi algebrica per il teorema di Chow, allora $\omega_X = \omega_X^o$ dove ω_X^o è il fascio dualizzante di X (cf. Hartshorne [H] III.7). Infatti i due fasci coincidono nei punti regolari e poiché ω_X è riflessivo abbiamo una applicazione canonica j

$$\omega_X^o \xrightarrow{j} \omega_X = (\omega_X^o)^{\vee\vee}$$

Ricordiamo che per definizione di fascio dualizzante, dato comunque un fascio coerente \mathcal{F} esiste un isomorfismo

$$H^n(X, \mathcal{F})^\vee \cong \text{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \omega_X^\circ)$$

Il supporto di $\text{Ker}j$ è contenuto in $S(X)$ e dunque $H^n(\text{Ker}j) = 0$, per dualità $\text{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\text{Ker}j, \omega_X^\circ) = 0$ cioè j è iniettiva e abbiamo una successione esatta

$$0 \longrightarrow \omega_X^\circ \xrightarrow{j} \omega_X \longrightarrow C \longrightarrow 0$$

dalla successione esatta lunga di coomologia ricaviamo $H^n(\omega_X) = H^n(\omega_X^\circ)$, per dualità $\text{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\omega_X^\circ, \omega_X^\circ) = \text{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\omega_X, \omega_X^\circ)$ ed esiste una $p: \omega_X \rightarrow \omega_X^\circ$ tale che $p \circ j = 1$.

D'altra parte abbiamo

$$\text{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\omega_X, \omega_X) = H^0(X, \text{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\omega_X, \omega_X)) = H^0(X, \mathcal{O}_X) = \mathbb{C}$$

$j \circ p$ è non nullo e quindi è un isomorfismo.

Sia adesso $Y \subset X$ una sottovarietà normale di codimensione 1, vogliamo trovare una relazione fra il fascio canonico di X e quello di Y .

In generale il problema non è semplice perché non sappiamo quanto influisce la parte di ω_X ristretta ai punti singolari di X sul gruppo dei divisori di Y .

Il seguente caso è più che sufficiente per le nostre necessità.

Proposizione 2.2. Nelle notazioni precedenti, se $S(X) \cap Y$ ha codimensione ≥ 2 in Y , allora $\omega_Y = (\omega_X \otimes \mathcal{O}_Y(Y))^{\vee\vee}$.

DIM. Poniamo $V = X - S(X) - S(Y)$ e $W = Y \cap V$, allora W è una sottovarietà di codimensione 1 in V e posso applicare la formula di aggiunta per le varietà lisce.

$$\omega_W = \omega_V \otimes \mathcal{O}_V(W)|_W$$

La tesi segue dalle proprietà di riflessività del fascio canonico.

□

§3 . Fibrazioni a fibra \mathbb{P}^n

In questo paragrafo studiamo alcune proprietà delle fibrazioni a fibra \mathbb{P}^n con lo scopo di introdurre alcuni ragionamenti che intervengono spesso nello studio delle degenerazioni di superfici razionali oltre a quello di dimostrare alcuni risultati dei quali faremo in seguito un uso proficuo.

Indichiamo con Δ un policilindro di centro 0 contenuto in \mathbb{C}^r , X varietà complessa di dimensione $r + n$, $f: X \rightarrow \Delta$ olomorfa, propria, di rango massimo e con fibra \mathbb{P}^n .

Lemma 3.1. Nelle notazioni precedenti, a meno di restringere Δ ad un policilindro più piccolo abbiamo che X è biolomorfo a $\Delta \times \mathbb{P}^n$.

DIM. Per ipotesi f ha rango massimo e quindi il morfismo è piatto, possiamo applicare il teorema del cambiamento di base al fascio \mathcal{O}_X e otteniamo

$$R^q f_* \mathcal{O}_X = 0 \quad \forall q > 0$$

Δ è una varietà di Stein, in particolare per il teorema di Cartan B

$$H^q(\Delta, f_* \mathcal{O}_X) = 0 \quad \forall q > 0$$

e per la successione spettrale di Leray

$$H^q(X, \mathcal{O}_X) = 0 \quad \forall q > 0$$

Per il teorema di Ehresmann X è diffeomorfo a $\Delta \times \mathbb{P}^n$, in particolare $H^2(X, \mathbb{Z}) = H^2(X_0, \mathbb{Z})$ e se consideriamo le successioni esponenziali in X e in X_0 abbiamo un diagramma commutativo

$$\begin{array}{ccc} H^1(X, \mathcal{O}_X^*) & \cong & H^2(X, \mathbb{Z}) \\ \downarrow i^* & & \parallel \\ H^1(X_0, \mathcal{O}_{X_0}^*) & \cong & H^2(X_0, \mathbb{Z}) \end{array}$$

dove $i: X_0 \rightarrow X$ è l'inclusione. Quindi un fascio invertibile \mathcal{L} su X è banale se e soltanto se \mathcal{L}_0 è banale.

Sia \mathcal{L} il fascio invertibile su X tale che $\mathcal{L}_0 = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)$

$$0 \longrightarrow \mathcal{L}(-X_0) \longrightarrow \mathcal{L} \longrightarrow \mathcal{L}_0 \longrightarrow 0$$

abbiamo $\mathcal{L}(-X_0)_t \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)$ e ripetendo il ragionamento fatto per il fascio \mathcal{O}_X si dimostra che

$$H^q(X, \mathcal{L}(-X_0)) = 0 \quad \forall q > 0$$

e la restrizione $H^0(X, \mathcal{L}) \xrightarrow{r_0} H^0(X_0, \mathcal{L}_0)$ è surgettiva.

Indichiamo con V un sottospazio lineare di $H^0(X, \mathcal{L})$ di dimensione $n+1$ tale che $r_0(V) = H^0(X_0, \mathcal{L}_0)$ e con $|V|$ il sistema lineare associato.

A meno di restringere Δ posso supporre che $|V|$ non ha punti base, questo implica tra l'altro che

$$r_t(V) = H^0(X_t, \mathcal{L}_t) \quad \forall t \in \Delta$$

Prendiamo una base v_0, \dots, v_n di V e definiamo $\phi: X \rightarrow \Delta \times \mathbb{P}^n$ nel modo seguente

$$\phi(x) = (f(x), v_0(x), \dots, v_n(x))$$

La verifica che ϕ è biolomorfa è immediata.

□

Teorema 3.2. Siano X, Y varietà complesse, Y connessa.

$f: X \rightarrow Y$ olomorfa, propria, di rango massimo con fibra \mathbb{P}^n , allora:

- i) X è un fibrato olomorfo con gruppo $PGL(n+1)$
- ii) $\mathcal{L} \in f^*Pic(Y)$ se e soltanto se \mathcal{L}_y è il fascio banale per qualche $y \in Y$.

DIM. i) Conseguenza immediata del Lemma 3.1 .

ii) Consideriamo il seguente sottoinsieme

$$A = \{y \in Y | \mathcal{L}_y \text{ è banale} \} = \{y \in Y | H^0(\mathcal{L}_y) \geq 1, H^0(\mathcal{L}_y^{-1}) \geq 1\}$$

Supponiamo $A \neq \emptyset$, per il Lemma 2.1 A è un aperto, per semicontinuità è chiuso e per connessione $A = Y$.

possiamo trovare quindi un ricoprimento aperto $\{U_\alpha\}$ di Y tale che \mathcal{L} è banale su $f^{-1}(U_\alpha) \quad \forall \alpha$ cioè $\mathcal{L} \in f^*Pic(Y)$. Il viceversa è ovvio.

□

Teorema 3.3. Nelle ipotesi del Teorema 3.2 se $Y \subset \mathbb{C}$ esiste un fibrato vettoriale olomorfo E su Y di rango $n + 1$ tale che $X = \mathbb{P}_Y(E)$.

DIM. Considero la seguente successione esatta di gruppi di Lie olomorfi

$$0 \longrightarrow \mathbb{C}^* \longrightarrow GL(n+1) \longrightarrow PGL(n+1) \longrightarrow 0$$

prendo i fasci delle sezioni olomorfe su Y

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_Y^* \longrightarrow \mathcal{G}l(n+1)_Y \longrightarrow \mathcal{P}gl(n+1)_Y \longrightarrow 0$$

la tesi segue dalla successione esatta di insiemi di coomologia

$$0 = H^1(\mathcal{O}_Y^*) \longrightarrow H^1(\mathcal{G}l(n+1)_Y) \longrightarrow H^1(\mathcal{P}gl(n+1)_Y) \longrightarrow H^2(\mathcal{O}_Y^*) = 0$$

□

Su X è quindi definito in modo naturale un fibrato in rette N tale che $N_t = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-1)$, indichiamo con \mathcal{L} il fascio delle sezioni di N^\vee , per il teorema del cambiamento di base la sua immagine diretta $f_*\mathcal{L}$ è un fascio localmente libero di rango $n + 1$.

Se $t \in Y$ per il teorema di Cartan A abbiamo una applicazione surgettiva

$$H^0(Y, f_*\mathcal{L}) \otimes \mathcal{O}_{Y,t} \xrightarrow{\phi_t} (f_*\mathcal{L})_t$$

segue che $h^0(f_*\mathcal{L}) > 0$ ed il sistema lineare $|\mathcal{L}|$ è non vuoto.

Corollario 3.4. Il sistema lineare $|\mathcal{L}|$ definito sopra non ha punti base e quindi esiste $D \in |\mathcal{L}|$ liscio.

DIM. Sia per assurdo $x \in X$ un punto base e $t = f(x)$, allora ogni elemento di $H^0(Y, f_*\mathcal{L})$ si annulla in x contraddicendo la surgettività di ϕ_t .

□

§4 . Singolarità quozienti e punti doppi razionali

Ricordiamo la definizione e le proprietà principali delle singolarità quozienti. Per maggiori dettagli su quanto detto in questo paragrafo rimandiamo al libro di Looijenga ([Lo] § 1.5) e all'articolo di Catanese ([C]).

Sia $G \subset Aut(\mathbb{C}^n, 0)$ un sottogruppo finito del gruppo degli automorfismi olomorfi di $(\mathbb{C}^n, 0)$.

Definizione 4.1. La singolarità $(X, p) = (\mathbb{C}^n, 0)/G$ si dice *singolarità quoziente*. Nello studio delle singolarità quozienti hanno importanza vitale due risultati classici, il lemma di Cartan e il teorema di Chevalley.

Lemma 4.1.(H.Cartan) Se $G \subset Aut(\mathbb{C}^n, 0)$ è un sottogruppo finito, esiste un nuovo sistema di coordinate nelle quali il gruppo G agisce linearmente.

DIM. Per $g \in G$ indico con $g' \in GL(n, \mathbb{C})$ il differenziale di g nell'origine.

Se indico con $w = (w_1, \dots, w_n)$ il vecchio sistema di coordinate, definisco il nuovo sistema $z = (z_1, \dots, z_n)$ nel modo seguente

$$z = z(w) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} g' g^{-1} w$$

Il differenziale nello 0 di tale trasformazione è l'identità e quindi z è effettivamente un sistema locale di coordinate.

Ora se $\gamma \in G$, nel nuovo sistema di coordinate $\gamma(z)$ è uguale a

$$z(\gamma w) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} g' g^{-1} \gamma w = \frac{1}{|G|} \sum_{\tilde{g} \in G} \gamma' \tilde{g}' \tilde{g}^{-1} w$$

dove la seconda uguaglianza è ottenuta effettuando la sostituzione $\tilde{g} = \gamma^{-1} g$.

Quindi nel nuovo sistema γ agisce come il suo differenziale.

□

Corollario 4.2. Nelle stesse notazioni usate nella dimostrazione del Lemma 4.1 se $(gw)_n = w_n, \forall g \in G$, allora $z_n = w_n$.

DIM. Evidente.

□

Quindi quando studiamo le singolarità quozienti possiamo, senza perdere generalità supporre che $G \subset GL(n, \mathbb{C})$, cosa che faremo anche noi nel resto del paragrafo.

Il gruppo G agisce sull'anello dei polinomi $\mathbb{C}[z_1, \dots, z_n]$ e la varietà affine $X = \mathbb{C}^n/G$ ha come anello delle funzioni regolari $\mathbb{C}[z_1, \dots, z_n]^G$.

Teorema 4.3.(Chevalley) Sia $G \subset GL(n, \mathbb{C})$ un sottogruppo finito, allora l'anello $\mathbb{C}[z_1, \dots, z_n]^G$ è un anello di polinomi se e soltanto se G è generato da pseudoriflessioni.

Quindi se $(X, 0)$ è una singolarità quoziente possiamo sempre supporre che $X = \mathbb{C}^n/G$ con $G \subset GL(n, \mathbb{C})$ e che G non contenga riflessioni.

Esempio 4.11. Singolarità cicliche.

Supponiamo di avere un sottogruppo ciclico finito G di $GL(n, \mathbb{C})$, fissiamo un isomorfismo $G \cong \mu_r$, esiste allora un sistema di coordinate in \mathbb{C}^n e numeri interi a_1, \dots, a_n tali che l'azione di G è data da

$$\mu_r \ni \xi: (z_1, \dots, z_n) \rightarrow (\xi^{a_1} z_1, \dots, \xi^{a_n} z_n)$$

Definizione 4.2. La n -upla di numeri razionali $\frac{1}{r}(a_1, \dots, a_n)$ si dice il *tipo* della singolarità ciclica \mathbb{C}^n/G .

È chiaro che il tipo determina completamente a meno di isomorfismo la singolarità ma non viceversa, ad esempio dal teorema di Chevalley segue che ogni singolarità

ciclica di dimensione 2 è isomorfa ad una singolarità ciclica di tipo $\frac{1}{r}(1, q)$ con r e q relativamente primi.

Esempio 4.2. Punti doppi razionali.

Definizione 4.3. Una singolarità quoziente $X = \mathbb{C}^2/G$ si dice un *punto doppio razionale* (in breve P.D.R.) se $G \subset SL(2, \mathbb{C})$.

Supponiamo che X sia contemporaneamente un P.D.R. e una singolarità ciclica, allora a meno di un cambiamento lineare di coordinate il gruppo G è formato dall'insieme delle matrici

$$\begin{pmatrix} \xi & 0 \\ 0 & \xi^{-1} \end{pmatrix} \quad \text{dove } \xi^r = 1$$

e r è l'ordine del gruppo G .

L'anello degli invarianti $\mathbb{C}[z_1, z_2]^G$ è generato come \mathbb{C} -algebra da tre elementi omogenei $u = z_1^r, v = -z_2^r, y = z_1 z_2$, X si immerge quindi in \mathbb{C}^3 ed è definito dall'equazione $uv + y^r = 0$.

È consuetudine chiamare tale X con il nome A_{r-1} .

In generale si dimostra che ogni P.D.R. si immerge nello spazio affine tridimensionale, più precisamente abbiamo una classificazione completa dei P.D.R. descritta nella seguente tabella.

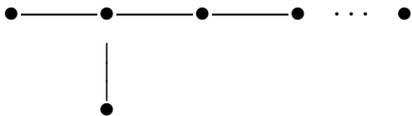
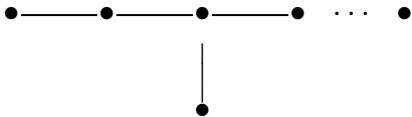
Tabella 4.1.

tipo	equazione	
A_{n-1}	$uv + y^n$	$n \geq 2$
D_n	$z^2 + x(y^2 + x^{n-2})$	$n \geq 4$
E_6	$z^2 + x^3 + y^4$	
E_7	$z^2 + x(y^3 + x^2)$	
E_8	$z^2 + x^3 + y^5$	

La curva eccezionale della risoluzione minimale di un punto doppio razionale di tipo A_n, D_n o E_n è formata da esattamente n curve razionali, ciascuna ad autointersezione -2 e che si intersecano trasversalmente.

Nella seguente tabella sono riportati i grafi duali delle curve eccezionali per ciascun tipo di P.D.R.

Tabella 4.2.

A_n		$n \geq 1$ vertici
D_n		$n \geq 4$ vertici
E_n		$n = 6, 7, 8$ vertici

Capitolo II : Rivestimenti ciclici di singolarità

§1 . Fasci G -linearizzati e varietà quozienti

Sia \mathcal{F} un fascio di gruppi abeliani in uno spazio topologico X e sia G un sottogruppo del gruppo degli automorfismi continui di X .

Supponiamo di avere associato ad ogni elemento $g \in G$ un isomorfismo di fasci

$$\sigma(g): \mathcal{F} \longrightarrow g^{-1}\mathcal{F}$$

allora per ogni aperto $U \subset X$ e per ogni $g \in G$ esiste un isomorfismo

$$\sigma(g)_U: \mathcal{F}(U) \longrightarrow g^{-1}\mathcal{F}(U) = \mathcal{F}(g(U))$$

Definizione 1.1. Diremo che \mathcal{F} è un *fascio G -linearizzato* se σ rispetta la struttura di gruppo di G , cioè se per ogni aperto $U \subset X$ vale

$$\sigma(gh)_U = \sigma(g)_{h(U)} \circ \sigma(h)_U \quad \forall g, h \in G$$

Supponiamo adesso che X sia uno spazio complesso ridotto e che G sia un sottogruppo finito del gruppo degli automorfismi olomorfi di X .

Il fascio \mathcal{O}_X ha una struttura naturale di fascio G -linearizzato definita dagli isomorfismi

$$\mathcal{O}_X \ni f \longrightarrow gf = f \circ g^{-1} \in g^{-1}\mathcal{O}_X \quad g \in G$$

Più in generale se $\alpha: G \rightarrow \mathbb{C}^*$ è un carattere possiamo definire su \mathcal{O}_X una struttura di fascio G -linearizzato (che indicheremo con (\mathcal{O}_X, α)) nel modo seguente

$$\sigma_\alpha(g)f = \alpha(g)(f \circ g^{-1})$$

Se α è il carattere banale ritroviamo l'azione naturale di G su \mathcal{O}_X .

Se $\pi: X \rightarrow Y = X/G$ è la proiezione al quoziente e \mathcal{F} è un fascio coerente di \mathcal{O}_Y moduli allora $\pi^*\mathcal{F}$ è in modo naturale un fascio G -linearizzato, infatti per ogni aperto $U \subset X$ abbiamo

$$\pi^{-1}\mathcal{F}(U) = \pi^{-1}\mathcal{F}(g(U)) = g^{-1}\pi^{-1}\mathcal{F}(U) \quad \forall g \in G$$

e poiché $\pi^*\mathcal{F} = \pi^{-1}\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X}$ l'azione naturale di G su \mathcal{O}_X determina una struttura di fascio G -linearizzato su $\pi^*\mathcal{F}$.

Viceversa se \mathcal{G} è un fascio coerente G -linearizzato su X esiste una azione di G sul fascio immagine diretta $\pi_*\mathcal{G}$.

Per la dimostrazione del seguente teorema rimandiamo a (D. Mumford: *Abelian Varieties*. pag 70).

Teorema 1.1. Nelle notazioni precedenti se G agisce liberamente su X il funtore

$$\mathcal{F} \longrightarrow \pi^*\mathcal{F}$$

stabilisce un'equivalenza fra la categoria degli \mathcal{O}_Y -moduli coerenti e la categoria dei fasci coerenti G -linearizzati su X .

L'inverso è dato dal funtore *immagine diretta invariante*

$$\mathcal{G} \longrightarrow \pi_*(\mathcal{G})^G$$

e a fasci localmente liberi corrispondono fasci localmente liberi dello stesso rango.

□

Esempio 1.1. Consideriamo il caso in cui $X = \mathbb{C}^n - \{0\}$ e $G \subset GL(n, \mathbb{C})$ agisce liberamente su X , allora $\omega_X = \pi^*\omega_Y$ è un fascio G -linearizzato e $\omega_Y = \pi_*(\omega_X)^G$.

Se $\det: G \rightarrow \mathbb{C}^*$ è il carattere determinante allora $\omega_X \cong (\mathcal{O}_X, \det^{-1})$.

Infatti è fissato un isomorfismo di fasci $\mathcal{O}_X \cong \omega_X$ dato da

$$f(x) \longrightarrow f(x)dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$$

e l'azione di G su ω_X è data da

$$\begin{aligned} g(f(x)dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n) &= f(g^{-1}x)dg^{-1}x_1 \wedge \dots \wedge dg^{-1}x_n \\ &= \det^{-1}(g)f(g^{-1}x)dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n \end{aligned}$$

Abbiamo dimostrato quindi la seguente

Proposizione 1.2. Nelle notazioni dell'Esempio 1.1 vale

$$\omega_Y = \mathcal{O}_Y \Leftrightarrow G \subset SL(n, \mathbb{C}).$$

DIM. Evidente. □

L'azione naturale di G su \mathcal{O}_X induce una azione di G sulla \mathcal{O}_Y -algebra $\pi_*\mathcal{O}_X$, per ogni carattere $\alpha \in \hat{G}$ definiamo

$$\mathcal{L}_\alpha = \{f \in \pi_*(\mathcal{O}_X) \mid gf = \alpha^{-1}(g)f \ \forall g \in G\}$$

Proposizione 1.3. Se il gruppo G agisce liberamente su X il fascio \mathcal{L}_α è invertibile e $\pi^*\mathcal{L}_\alpha = (\mathcal{O}_X, \alpha)$.

DIM. In virtù del Teorema 1.1 è sufficiente dimostrare che \mathcal{L}_α è l'immagine diretta invariante del fascio G -linearizzato (\mathcal{O}_X, α) .

L'azione di G su $\pi_*(\mathcal{O}_X, \alpha)$ è data da

$$\sigma_\alpha(g)(f) = \alpha(g)(f \circ g^{-1})$$

e quindi

$$\sigma_\alpha(g)(f) = f \ \forall g \in G \Leftrightarrow gf = \alpha^{-1}(g)f \ \forall g \in G.$$

□

Sempre nell'ipotesi che G agisca liberamente se α e β sono caratteri di G è definito in modo naturale un morfismo

$$\mathcal{L}_\alpha \otimes \mathcal{L}_\beta \xrightarrow{\phi} \mathcal{L}_{\alpha+\beta}$$

ϕ è iniettivo perché i fasci sono invertibili, d'altra parte ogni $\mathcal{L}_\gamma \subset \pi_*(\mathcal{O}_X)$ è localmente generato da una sezione mai nulla (se $\pi^{-1}(U)$ ha $|G|$ componenti connesse considero la funzione olomorfa che prende i valori $\gamma(g)$, $g \in G$), e quindi ϕ è anche surgettiva.

Se G è abeliano allora $|\hat{G}| = |G|$ e

$$\pi_*\mathcal{O}_X = \bigoplus_{\alpha \in \hat{G}} \mathcal{L}_\alpha$$

e se $G \simeq \mu_n$ è un gruppo ciclico

$$\pi_*\mathcal{O}_X = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}_n} \mathcal{L}_i$$

§2 . Rivestimenti ciclici non diramati

Sia Y uno spazio normale connesso, \mathcal{L} un fascio invertibile su Y tale che $\mathcal{L}^{\otimes n} = \mathcal{O}_Y$ e indichiamo con $p: L \rightarrow Y$ il fibrato in rette associato a \mathcal{L} .

Se $s: \mathcal{O}_Y \rightarrow \mathcal{L}^{\otimes n}$ è una sezione mai nulla e t è la coordinata sulle fibre di L è ben definito un sottospazio $X \subset L$ come il luogo di zeri della sezione $t^n - s$.

Si vede subito che $\pi: X \rightarrow Y$ è un rivestimento ciclico non diramato di grado n .

Proposizione 2.1. $\pi_*\mathcal{O}_X = \bigoplus_{i=0}^{n-1} \mathcal{L}^{-i}$ dove la struttura di \mathcal{O}_Y -algebra è data dagli isomorfismi

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-i} \otimes \mathcal{L}^{-j} &\longrightarrow \mathcal{L}^{-i-j} && \text{se } i+j < n \\ \mathcal{L}^{-i} \otimes \mathcal{L}^{-j} &\longrightarrow \mathcal{L}^{-i-j} \xrightarrow{s} \mathcal{L}^{-i-j+n} && \text{se } i+j \geq n \end{aligned}$$

DIM. Se $V \subset Y$ aperto, ogni funzione in $p^{-1}(V)$ si scrive in modo unico nella forma

$$\sum_{i=0}^{\infty} a_i t^i \quad a_i \in \Gamma(V, \mathcal{L}^{-i})$$

La tesi segue allora dal fatto che X è definito dalla relazione $t^n = s$.

□

L'azione di μ_n su X definita da $t \rightarrow \xi t$, $\xi \in \mu_n$ induce su $\pi_* \mathcal{O}_X = \bigoplus_{i=0}^{n-1} \mathcal{L}^{-i}$ la seguente azione

$$\mu_n \ni \xi: f_i \longrightarrow \xi^{-i} f_i \quad f_i \in \mathcal{L}^{-i}$$

e quindi \mathcal{L}^{-i} è l'autofascio corrispondente al carattere $i \in \mathbb{Z}_n \simeq \hat{\mu}_n$.

Proposizione 2.2. Se n è il minimo intero positivo per cui $\mathcal{L}^n = \mathcal{O}_Y$ lo spazio X è connesso.

DIM. Sia $X' \subset X$ una componente connessa, allora $\pi': X' \rightarrow Y$ è un rivestimento ciclico di grado $m \leq n$ con gruppo di automorfismi $G' = \mu_m \subset G$.

Se $\alpha \in \hat{G}$ allora $\pi'^*(\mathcal{L}_\alpha) = (\mathcal{O}_{X'}, \alpha')$ dove α' è la restrizione del carattere α a G' e quindi $\mathcal{L}_\alpha^m = \mathcal{O}_Y \quad \forall \alpha \in \hat{G}$ che implica $m = n$.

□

§3 . Rivestimenti ciclici di singolarità normali

Un morfismo finito $f: X \rightarrow Y$ è univocamente determinato dalla \mathcal{O}_Y -algebra $f_* \mathcal{O}_X$ (cf. [F] pag. 59, [H] II Ex 5.17), e se $f': X' \rightarrow Y$ è un altro morfismo finito esiste una bigezione naturale

$$\mathcal{H}ol_Y(X, X') = \text{Hom}_{\mathcal{O}_Y}(f'_* \mathcal{O}_{X'}, f_* \mathcal{O}_X)$$

dove $\mathcal{H}ol_Y(X, X')$ sono le applicazioni $g: X \rightarrow X'$ tali che $f = f' \circ g$. Viceversa data una \mathcal{O}_Y -algebra coerente \mathcal{A} esiste un morfismo finito $f: X \rightarrow Y$ tale che $f_* \mathcal{O}_X = \mathcal{A}$.

Tale X si indica con $\text{Spec}_{\mathcal{O}_Y} \mathcal{A}$.

Sia (X, p) una singolarità normale, D un divisore di Weil \mathbb{Q} -Cartier in X .

Definizione 3.1. Chiamiamo *indice* di D in p il minimo intero positivo r per cui rD è principale in p .

Sia quindi r l'indice di D in p e prendiamo un rappresentante X tale che rD sia principale in X .

Fissiamo un isomorfismo $s: \mathcal{O}_X(-rD) \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_X$, tensorizziamo per $\mathcal{O}_X(nD)$, $n \in \mathbb{Z}$ e otteniamo degli isomorfismi

$$s: \mathcal{O}_X((n-r)D) \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_X(nD) \quad \forall n \in \mathbb{Z}$$

Consideriamo quindi la \mathcal{O}_X -algebra coerente

$$\mathcal{A} = \bigoplus_{i=0}^{r-1} \mathcal{O}_X(-iD)$$

dove la struttura di \mathcal{O}_X -algebra è data estendendo per bilinearità le applicazioni naturali

$$\mathcal{O}_X(-iD) \times \mathcal{O}_X(-jD) \rightarrow \mathcal{O}_X(-(i+j)D) \quad i+j < r$$

$$\mathcal{O}_X(-iD) \times \mathcal{O}_X(-jD) \rightarrow \mathcal{O}_X(-(i+j)D) \xrightarrow{s} \mathcal{O}_X(-(i+j-r)D) \quad i+j \geq r$$

Esiste una azione naturale di μ_r su \mathcal{A}

$$\mu_r \ni \xi: f_i \rightarrow \xi^{-i} f_i \quad \text{se } f_i \in \mathcal{O}_X(-iD)$$

\mathcal{O}_X coincide con il sottofascio degli invarianti di \mathcal{A} e quindi

$$\pi: X' = \text{Spec}_{\mathcal{O}_X} \mathcal{A} \rightarrow X$$

è un rivestimento ciclico di grado r .

Teorema 3.1. Nelle notazioni precedenti valgono

- 1) La fibra di π sopra p contiene un solo punto q .
- 2) X' è normale.
- 3) π è ramificato sopra i punti dove D non è Cartier.
- 4) π^*D è un divisore di Cartier.

DIM. (cf Reid [R]) Sia $U \subset X$ l'insieme dei punti regolari e $i: U \rightarrow X$ l'immersione naturale. Poniamo $U' = \pi^{-1}(U) \subset X'$.

U' è contenuto nell'insieme dei punti regolari di X' , e per quanto visto nel paragrafo precedente $\pi: U' \rightarrow U$ è un rivestimento connesso non diramato di grado r , questo prova 1).

Per costruzione π è finito e $\pi_*\mathcal{O}_{X'} = \mathcal{A}$.

\mathcal{A} è una \mathcal{O}_X -algebra satura e questo prova la normalità di X' .

3) segue dai risultati del paragrafo precedente mentre 4) segue dal fatto che $\mathcal{O}_U(-iD)$ è l'autofascio di $\pi_*\mathcal{O}_{U'}$ corrispondente al carattere $i \in \hat{\mu}_r$.

□

Teorema 3.2. (X, p) è una singolarità quoziente se e soltanto se (X', q) è quoziente.

DIM. Supponiamo che (X, p) sia quoziente, per i teoremi di Cartan e Chevalley possiamo supporre che

$$(X, p) = (\mathbb{C}^n, 0)/G \quad G \subset GL(n, \mathbb{C})$$

e che G non contenga riflessioni.

Indichiamo (facendo un leggero abuso di notazioni) con \mathbb{C}^n un rappresentante G -stabile del germe $(\mathbb{C}^n, 0)$ e con $\delta: \mathbb{C}^n \rightarrow X$ la proiezione al quoziente.

Indichiamo inoltre con $U \subset X$ il massimo aperto per cui G agisce liberamente su $\delta^{-1}U$.

Poiché G non contiene riflessioni $\mathbb{C}^n - \delta^{-1}U$ è unione finita di sottospazi lineari di codimensione ≥ 2 e quindi $\delta^{-1}U$ è il rivestimento universale di U .

Per le proprietà del rivestimento universale e per il teorema di estensione di Riemann-Hartogs esiste un sottogruppo $G' \subset G$ ed un diagramma commutativo

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}^n/G' & \xrightarrow{f} & X' \\ \uparrow p & & \downarrow \pi \\ \mathbb{C}^n & \xrightarrow{\delta} & X \end{array}$$

dove f è un biolomorfismo su $p\delta^{-1}(U)$.

Dalla normalità di X' segue che f è un isomorfismo e quindi X' è quoziente.

Il viceversa segue facilmente dalle proprietà dei rivestimenti e dal teorema di estensione di Riemann-Hartogs.

□

Abbiamo quindi dimostrato che le singolarità quozienti sono stabili per rivestimenti ciclici diramati in codimensione ≥ 2 , un'altra classe stabile è quella delle singolarità canoniche (cf Reid [R]) mentre non sono stabili le singolarità razionali (anche in dimensione 2, cf. Esnault-Viehweg [E-V]) e le singolarità di Cohen-Macaulay ([L-W] Esempio 5.11).

Corollario 3.3. Nelle notazioni del Teorema 3.1 se X è una singolarità quoziente e K_X è un multiplo intero del divisore D , allora X' è un punto doppio razionale.

DIM. X' è quoziente per il Teorema 3.2 e $K_{X'} = \pi^*K_X$ è un divisore principale.

□

§4 . Rivestimenti ciclici globali

Adesso vogliamo estendere globalmente il rivestimento descritto nel paragrafo precedente.

Sia X uno spazio normale, D un divisore di Weil su X e r un intero positivo tale che:

- 1) rD è Cartier
- 2) esiste un divisore effettivo B il cui supporto non contiene punti singolari di X
- 3) rD è linearmente equivalente a B .

B è il luogo di zeri (con molteplicità) di una sezione

$$\mathcal{O}_X \xrightarrow{s} \mathcal{O}_X(rD)$$

Come nel caso locale costruiamo la \mathcal{O}_X -algebra coerente

$$\mathcal{A} = \bigoplus_{i=0}^{r-1} \mathcal{O}_X(-iD)$$

dove la struttura di algebra è indotta dal morfismo

$$\mathcal{O}_X(-rD) \xrightarrow{s^\vee} \mathcal{O}_X$$

poniamo poi $\pi: X' = \text{Spec}_{\mathcal{O}_X} \mathcal{A} \rightarrow X$

Proposizione 4.1.

- 1) Sia $x \in X'$, allora l'ordine di diramazione di π in x è:
 - a) r se $\pi(x) \in \text{Supp}(B)$
 - b) indice di D in $\pi(x)$ altrimenti
- 2) I punti singolari di X' sono sopra i punti singolari di X e di B .
- 3) Se B è ridotto allora X' è normale.

DIM. 1) La parte b) segue dallo studio locale, la parte a) dal fatto che se $\pi(x)$ non è un punto singolare di X allora X' è definito localmente dall'equazione $t^r = s$.

2) Se $\pi(x)$ è non singolare allora

$$x \text{ è singolare} \iff s = ds = 0 \iff \pi(x) \in S(B)$$

3) Se B è ridotto allora $S(X) \cup S(B)$ è un chiuso di codimensione ≥ 2 e quindi $i_* i^* \mathcal{O}_{X'} = \mathcal{O}_{X'}$ dove

$$i: \pi^{-1}(X - (S(X) \cup S(B))) \rightarrow X'$$

è l'immersione naturale.

□

Capitolo III : Deformazioni e numero di Milnor

§1 . Deformazioni di singolarità analitiche

In questo paragrafo passiamo in rassegna, senza dimostrazioni, alcune proprietà fondamentali delle deformazioni che useremo in seguito.

Per maggiori dettagli e per una bibliografia completa rimandiamo all'articolo di Lazzeri ([L]).

Definizione 1.1. Un morfismo di germi di spazi analitici

$$\varphi: (X, 0) \rightarrow (T, 0)$$

si dice una deformazione di $(X_0, 0)$ se:

- i) φ è piatto
- ii) Esiste un isomorfismo fra $(X_0, 0)$ e $\varphi^{-1}(0)$

Lo spazio $(T, 0)$ viene detto spazio dei moduli o dei parametri della deformazione φ .

Supponiamo che $(X, 0)$ sia immerso in $(\mathbb{C}^n \times T, 0)$ e che φ sia indotto dalla proiezione sul secondo fattore.

Indichiamo con $I \subset \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n \times T, 0}$ l'ideale che definisce X e con $I_0 \subset \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n, 0}$ l'ideale che definisce X_0 , allora $I_0 = I \otimes_{\mathcal{O}_{T, 0}} \mathbb{C}$ dove \mathbb{C} è il campo residuo di $\mathcal{O}_{T, 0}$.

Infatti abbiamo una successione esatta

$$0 \longrightarrow I \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n \times T, 0} \longrightarrow \mathcal{O}_{X, 0} \longrightarrow 0$$

tensorizzando per \mathbb{C} otteniamo la successione esatta

$$\text{Tor}(\mathcal{O}_{X,0}, \mathbb{C}) \longrightarrow I \otimes_{\mathcal{O}_{T,0}} \mathbb{C} \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{C}^N,0} \longrightarrow \mathcal{O}_{X_0,0} \longrightarrow 0$$

Poiché $\mathcal{O}_{X,0}$ è un $\mathcal{O}_{T,0}$ -modulo piatto il Tor che compare è 0 e la tesi segue.

Proposizione 1.1. Se $\varphi: (X, 0) \rightarrow (T, 0)$ è una deformazione di $(X_0, 0)$ e se esiste una immersione di $(X_0, 0)$ in $(\mathbb{C}^N, 0)$, allora esiste una immersione di $(X, 0)$ in $(\mathbb{C}^N \times T, 0)$ tale che φ è indotto dalla proiezione sul secondo fattore.

Indichiamo per il momento con (φ, X, T) un morfismo piatto fra spazi complessi $\varphi: X \rightarrow T$

La terna (φ, X, T) viene detta famiglia di spazi complessi con base T , viene invece detta deformazione dello spazio complesso X_0 se esiste un punto distinto $0 \in T$ ed un isomorfismo $X_0 \cong \varphi^{-1}(0)$.

Se X_0 è compatto possiamo supporre, eventualmente restringendoci ad un intorno aperto di $\varphi^{-1}(0)$, che φ sia un'applicazione propria (cf. [B-P-V] Prop I 8.9).

Un morfismo $h: (\varphi', X', T') \rightarrow (\varphi, X, T)$ fra famiglie di spazi complessi è il dato di due morfismi h_1, h_2 tali che il seguente diagramma sia commutativo

$$\begin{array}{ccc} X' & \xrightarrow{h_1} & X \\ \downarrow \varphi' & & \downarrow \varphi \\ T' & \xrightarrow{h_2} & T \end{array}$$

Supponiamo adesso che la dimensione delle fibre di φ sia 2

Definizione 1.2. Il morfismo h si dice una risoluzione simultanea se h_2 è un rivestimento ramificato e per ogni $t' \in T'$ il morfismo

$$X'_{t'} \xrightarrow{h_1} X_t \quad t = h_2(t')$$

è la risoluzione minimale delle singolarità di X_t .

Come vedremo in generale non esistono risoluzioni simultanee di famiglie di spazi complessi, fra i vari teoremi di esistenza citiamo il seguente

Teorema 1.2. Sia (φ, X, T) una famiglia di spazi complessi di dimensione 2, supponiamo che valgano i seguenti fatti:

- 1) T è irriducibile di dimensione 1
- 2) X_t è nonsingolare oppure ha un numero finito di punti doppi razionali

Allora esiste una risoluzione simultanea (nota con il nome di Brieskorn- Tyurina) con la base nonsingolare.

DIM. Tyurina [T] Teorema 1.

□

§2 . Generalità sulla fibra di Milnor

In tutto il paragrafo supporremo che $(X_0, 0)$ sia una singolarità isolata di dimensione n .

Definizione 2.1. Una deformazione $f: X \rightarrow T$ di X_0 si dice uno *smoothing* se :

- 1) T è irriducibile
- 2) Esiste un chiuso analitico proprio $T' \subset T$ tale che se $t \notin T'$ allora X_t è nonsingolare.

Supponiamo $(X_0, 0)$ immerso in $(\mathbb{C}^N, 0)$, esiste allora un'immersione di $(X, 0)$ in $(\mathbb{C}^N \times T, 0)$ tale che f è indotta dalla proiezione sul secondo fattore.

Indichiamo con $U \subset T$ l'aperto (denso e connesso) formato dai punti t per cui X_t è non singolare.

Se $r > 0$ poniamo $B_r = \{z \in \mathbb{C}^N \mid \|z\| < r\}$ e $S_r = \partial B_r$

Definizione 2.2. Diremo che S_r è una *sfera di Milnor* per X_0 se per ogni $0 < r' \leq r$ la sfera $S_{r'}$ interseca trasversalmente X_0 .

Si dimostra che per ogni singolarità isolata immersa esiste una sfera di Milnor (Milnor [M] Cor. 2.9, Looijenga [Lo] Lemma 2.2).

Sia quindi S_r una sfera di Milnor per X_0 , in tal caso $K_0 = X_0 \cap S_r$ è una varietà differenziabile compatta di dimensione reale $2n - 1$.

Poiché l'intersezione di S_r con X_0 è trasversale posso supporre, eventualmente restringendo T , che $S_r \times T$ intersechi trasversalmente X_t in K_t per ogni $t \in T$.

Se $t \in U$ definiamo la *fibra di Milnor* (risp. *fibra di Milnor compatta*)

$$F_t = (B_r \times T) \cap X_t \quad (\text{risp. } \overline{F}_t = (\overline{B}_r \times T) \cap X_t)$$

Segue dal teorema di Ehresmann che la classe di diffeomorfismo di K_t è indipendente da $t \in T$ e che la classe di diffeomorfismo della coppia (\overline{F}_t, K_t) è indipendente da $t \in U$ (cf. [C]).

Si può dimostrare (cf. Wahl [W]) che la classe di diffeomorfismo della coppia $(\overline{F}_t, \partial F_t)$ dipende solamente dallo smoothing e non dalla particolare immersione di X .

Milnor ([M] Th. 6.5) ha dimostrato che se X_0 è una ipersuperficie la fibra F ha il tipo di omotopia di un bouquet di sfere di dimensione n .

In generale la fibra di Milnor ha il tipo di omotopia di un CW-complesso finito di dimensione n e questo segue dal Lemma di Andreotti-Frankel (cf. Milnor *Morse Theory*) e dalla compattezza di \overline{F} (cf. anche [W],[L-W],[Lo]).

Definizione 2.3. Il numero $\mu = \text{rango } H_n(F, \mathbb{Z})$ si dice il *numero di Milnor* dello smoothing $f: X \rightarrow T$.

\overline{F} è una varietà compatta con bordo, orientabile di dimensione reale $2n$, per i teoremi di dualità di Poincaré e Leschetz abbiamo degli isomorfismi (in qualsiasi anello di coefficienti)

$$H_c^q(F) = H_{2n-q}(F) = H^q(\overline{F}, \partial F)$$

Supponiamo adesso che n sia pari e consideriamo la coomologia a coefficienti reali, abbiamo una forma bilineare non degenere

$$H^n(\overline{F}) \times H^n(\overline{F}, \partial F) \xrightarrow{\cup} H^{2n}(\overline{F}, \partial F) = \mathbb{R}$$

Se componiamo con l'applicazione naturale $H^n(\overline{F}, \partial F) \rightarrow H^n(\overline{F})$ abbiamo una forma bilineare simmetrica

$$H^n(\overline{F}, \partial F) \times H^n(\overline{F}, \partial F) \xrightarrow{q} \mathbb{R}$$

Indichiamo con μ_+ (risp. μ_0, μ_-) il numero di autovalori positivi (risp. nulli, negativi) della forma q , osserviamo che $\mu = \mu_- + \mu_0 + \mu_+$.

Studiamo adesso più da vicino il caso $n = 2$.

Sia X_0 un rappresentante di Stein della singolarità $(X_0, 0)$ e sia $Z \xrightarrow{\pi} X_0$ una risoluzione.

Definizione 2.4. Si dice *genere geometrico* della singolarità $(X_0, 0)$ il numero intero

$$p_g(X_0) = \dim H^1(\mathcal{O}_Z) - \delta(X_0)$$

dove $\delta(X_0) = \dim H^0(\pi_* \mathcal{O}_Z / \mathcal{O}_{X_0})$.

Osserviamo che X_0 è normale $\iff \delta(X_0) = 0$.

Nel seguito utilizzeremo più volte il seguente risultato

Teorema 2.1. Se X_0 è irriducibile di dimensione 2, allora valgono

- 1) $\mu_0 + \mu_+ = 2p_g(X_0)$
- 2) Se X_0 è normale $b_1(F) = 0$
- 3) Se X_0 è normale μ_0 e μ_+ sono indipendenti dallo smoothing

DIM.

- 1) Steenbrink ([St] Th. 2.24).
- 2) Greuel-Steenbrink ([G-S] Th. 2).
- 3) Dalla definizione della forma q segue banalmente che μ_0 è esattamente la dimensione del nucleo della applicazione naturale $H^2(\overline{F}, \partial F) \rightarrow H^2(\overline{F})$.

Scriviamo la successione esatta di coomologia della coppia $(\overline{F}, \partial F)$

$$\begin{array}{ccccccccc} H^1(\overline{F}, \partial F) & \rightarrow & H^1(\overline{F}) & \rightarrow & H^1(\partial F) & \rightarrow & H^2(\overline{F}, \partial F) & \rightarrow & H^2(\overline{F}) \\ & & \parallel & & & & & & \\ & & 0 & & & & & & \end{array}$$

Quindi $\mu_0 = b_1(\partial F) - b_1(F)$ e la tesi segue banalmente dai punti 1) e 2).

□

È abbastanza facile descrivere la fibra di Milnor di uno smoothing $f: X \rightarrow T$ se esiste una risoluzione simultanea con base nonsingolare .

Infatti supponiamo di avere un diagramma commutativo

$$\begin{array}{ccc} X' & \xrightarrow{h_1} & X \\ \downarrow f' & & \downarrow f \\ T' & \xrightarrow{h_2} & T \end{array}$$

allora le fibre di f' sono isotope alla fibra X'_0 che è la risoluzione minimale di X_0 , e quindi la fibra di Milnor è isotopa ad un intorno della curva eccezionale di X'_0 .

Corollario 2.2. Se $f: (X, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ è uno smoothing di un punto doppio razionale di tipo A_r, D_r o E_r la fibra di Milnor ha il tipo di omotopia di un bouquet di r sfere S^2 .

DIM. Evidente.

□

§3 . Quozienti e rivestimenti ciclici di smoothing

Sia $(Y, 0) \xrightarrow{\pi} (\mathbb{C}, 0)$ uno smoothing di una singolarità isolata $(Y_0, 0)$, G un gruppo finito di automorfismi di $(Y, 0)$ la cui azione sia libera su $Y - \{0\}$ e compatibile con π , cioè $\pi \circ g = \pi \quad \forall g \in G$.

π si fattorizza quindi al quoziente $X = Y/G$ e abbiamo un diagramma commutativo

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{\pi} & \mathbb{C} \\ \downarrow p & & \parallel \\ X & \xrightarrow{\pi'} & \mathbb{C} \end{array}$$

Se $t \neq 0$, G agisce liberamente su Y_t e quindi π' è uno smoothing della singolarità $X_0 = Y_0/G$.

Vogliamo studiare la relazione che intercorre fra il numero di Milnor μ dello smoothing π e il numero di Milnor μ' dello smoothing π' .

Indichiamo con F la fibra di Milnor di Y e con F' quella di X .

Per prima cosa occorre immergere Y in qualche \mathbb{C}^N

Lemma 3.1. Sia $(V, 0) \xrightarrow{\pi} (\mathbb{C}, 0)$ una deformazione della singolarità $(V_0, 0)$ e sia G un gruppo finito di automorfismi di V con azione compatibile con π , allora esiste un intero $N > 0$ ed una immersione $\varphi: (V, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^N \times \mathbb{C}, 0)$ che commuta con l'azione di G

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{\varphi} & \mathbb{C}^N \times \mathbb{C} \\ \downarrow \pi & & \downarrow \pi_2 \\ \mathbb{C} & \xrightarrow{id} & \mathbb{C} \end{array}$$

dove G agisce in modo lineare su \mathbb{C}^N e π_2 è la proiezione sul secondo fattore.

DIM. Per la Prop. 1.1 possiamo supporre che $(V, 0) \subset (\mathbb{C}_x^n \times \mathbb{C}_t, 0)$ e che π sia indotto dalla proiezione sul secondo fattore.

Allora $\mathcal{O}_{V,0} = \mathbb{C}\{x_1, \dots, x_n, t\}/I$ e se m è la cardinalità di G definiamo un morfismo di algebre analitiche locali

$$\varphi^*: \mathbb{C}\{y_{i,g}, t\}_{g \in G, i=1, \dots, n} \rightarrow \mathcal{O}_{V,0} \rightarrow 0$$

ponendo $\varphi^*(t) = t$ e $\varphi^*(y_{i,g}) = gx_i$.

φ^* definisce una immersione φ di $(V, 0)$ in $(\mathbb{C}^N \times \mathbb{C}, 0)$, dove $N = nm$, e tale immersione è G -equivariante se consideriamo l'azione di G su $\mathbb{C}_y^N \times \mathbb{C}_t$ definita da $g(t) = t$ e $g(y_{i,h}) = y_{i,gh}$

□

Il Lemma 3.1 si può applicare allo smoothing Y , ottenendo un diagramma commutativo

$$\begin{array}{ccccccc} \mathbb{C} & \xleftarrow{\pi} & Y & \xrightarrow{\varphi} & \mathbb{C}^N \times \mathbb{C} & = & \mathbb{C}^N \times \mathbb{C} \\ \parallel & & \downarrow p & & \downarrow p_1 & & \downarrow p_2 \\ \mathbb{C} & \xleftarrow{\pi'} & X & \xrightarrow{\varphi'} & (\mathbb{C}^N/G) \times \mathbb{C} & \subset & \mathbb{C}^M \times \mathbb{C} \end{array}$$

dove si suppone $\mathbb{C}^N/G \subset \mathbb{C}^M$.

p e p_1 sono continue ed aperte, fissata quindi una sfera di Milnor $S_r \subset \mathbb{C}^N$ per Y_0 esistono $0 < r' < r$ e $0 < s' < s$ tali che:

- i) $S_s \subset \mathbb{C}^M$ è una sfera di Milnor per X_0
- ii) $p_2^{-1}(B_{s'} \times \mathbb{C}) \subset B_{r'} \times \mathbb{C} \subset p_2^{-1}(B_s \times \mathbb{C}) \subset B_r \times \mathbb{C}$.

dove, beninteso, con \mathbb{C} si intende un rappresentante sufficientemente piccolo di $(\mathbb{C}, 0)$. Quindi se $t \in \mathbb{C}$

$$p^{-1}(X_t \cap (B_{s'} \times \mathbb{C})) \subset Y_t \cap (B_{r'} \times \mathbb{C}) \subset p^{-1}(X_t \cap (B_s \times \mathbb{C})) \subset Y_t \cap (B_r \times \mathbb{C})$$

Ora le immersioni

$$p^{-1}(X_t \cap (B_{s'} \times \mathbb{C})) \subset p^{-1}(X_t \cap (B_s \times \mathbb{C}))$$

$$Y_t \cap (B_{r'} \times \mathbb{C}) \subset Y_t \cap (B_r \times \mathbb{C})$$

sono delle equivalenze omotopiche e quindi inducono degli isomorfismi fra i gruppi di omologia, da questo segue che $H_*(p^{-1}(F')) = H_*(F)$ ed in particolare $e(F) = e(p^{-1}(F')) = |G|e(F')$ dove e indica la caratteristica di Eulero topologica.

Corollario 3.2. Se Y_0 è normale di dimensione 2 si ha $\mu + 1 = |G|(\mu' + 1)$

DIM. $(X_0, 0)$ è il quoziente di una singolarità normale ed è quindi essa stessa normale, per il Teorema 2.1 $b_1(F') = 0$ e quindi $e(F') = \mu' + 1$, analogamente $e(F) = \mu + 1$ da cui la tesi.

□

Esempio 3.1. Facciamo agire il gruppo ciclico μ_n su \mathbb{C}^4 nel modo seguente:

$$\mu_n \ni \xi: (u, v, y, t) \rightarrow (\xi u, \xi^{-1}v, \xi^a y, t)$$

con a numero intero positivo relativamente primo con n .

Consideriamo l'ipersuperficie $Y \subset \mathbb{C}^4$ definita dalla equazione

$$uv + y^{dn} = t\varphi(u, v, y, t) \quad d > 0$$

dove φ è una funzione olomorfa invariante per l'azione di μ_n dimodoché Y sia una sottovarietà stabile per l'azione di G .

Supponiamo che l'applicazione $\pi: Y \rightarrow \mathbb{C}$ indotta dalla proiezione sulla coordinata t sia uno smoothing della singolarità $(Y_0, 0) = \{uv + y^{dn} = 0\}$.

$(Y_0, 0)$ è un P.D.R. di tipo A_{dn-1} e quindi la fibra di Milnor di Y ha il tipo di omotopia di un bouquet di $dn - 1$ sfere S^2 .

La coordinata t è lasciata fissa dal gruppo $G = \mu_n$, possiamo quindi fattorizzare π al quoziente

$$Y \xrightarrow{p} X = Y/G \xrightarrow{\pi'} \mathbb{C}$$

Facciamo l'ulteriore ipotesi che G agisca liberamente su $Y - \{0\}$, allora X è uno smoothing della singolarità $(X_0, 0)$.

$(X_0, 0)$ è una singolarità ciclica di tipo $\frac{1}{dn^2}(1, dna - 1)$. Infatti abbiamo una fattorizzazione

$$X_0 = Y_0/G = A_{dn-1}/\mu_n = (\mathbb{C}^2/\mu_{dn})/\mu_n$$

L'anello locale della singolarità A_{dn-1} è, come abbiamo visto nel §I.4, uguale a

$$\mathbb{C}\{z_1^{dn}, z_2^{dn}, z_1 z_2\} = \mathbb{C}\{u, v, y\}/(uv + y^{dn})$$

dove $u = z_1^{dn}$, $v = -z_2^{dn}$, $y = z_1 z_2$. Se quindi su \mathbb{C}^2 consideriamo l'azione di μ_{dn^2}

$$\mu_{dn^2} \ni \xi : (z_1, z_2) \rightarrow (\xi z_1, \xi^{dna-1} z_2)$$

con semplici conti si trova

$$\mu_{dn^2} \ni \xi : (u, v, y) \rightarrow (\xi^{dn} u, \xi^{-dn} v, \xi^{dna} y)$$

che è appunto l'azione che abbiamo su Y_0 .

Il numero di Milnor dello smoothing π' , grazie al Cor. 3.2 si calcola immediatamente ed è uguale a $d - 1$.

Sia ora $(V, 0)$ una singolarità normale e di Cohen-Macaulay (C.M.)

Definizione 3.1. La singolarità $(V, 0)$ si dice di *Gorenstein* se il divisore canonico è di Cartier, si dice \mathbb{Q} -*Gorenstein* se il divisore canonico è \mathbb{Q} -Cartier ed in tal caso si chiama *indice* di $(V, 0)$ il minimo intero positivo n per cui nK_V è di Cartier.

Esempio 3.2. Una singolarità normale $(V, 0)$ di ipersuperficie è di Gorenstein.

Infatti sia $V \subset \mathbb{C}^{n+1}$ definita dalla funzione $F = F(x_0, \dots, x_n)$, a meno di una permutazione delle coordinate in \mathbb{C}^{n+1} , posso supporre $\frac{\partial F}{\partial x_0} \neq 0$. In queste ipotesi si verifica facilmente che

$$s = \frac{dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n}{\frac{\partial F}{\partial x_0}}$$

è una n -forma meromorfa su V (cf. Reid [R]).

Esempio 3.3. Nelle stesse notazioni dell'Esempio 3.1 la singolarità $(X, 0)$ è \mathbb{Q} -Gorenstein di indice n .

Infatti X è uno smoothing di una singolarità normale, quindi è C.M. e per il criterio di Serre (cf. Reid [R]) X è essa stessa normale.

Una base locale per il fascio canonico di Y è data da

$$s = \frac{du \wedge dv \wedge dy}{\frac{\partial F}{\partial t}} \quad F = uv + y^{dn} - t\varphi(u, v, y, t)$$

$\frac{\partial F}{\partial t}$ è invariante per l'azione di μ_n , il quale agisce quindi su s mediante moltiplicazione per ξ^a , $\xi \in \mu_n$.

ω_X è quindi l'autofascio di $p_*\mathcal{O}_Y$ corrispondente al carattere $a \in \mathbb{Z}_n$ e poiché $(a, n) = 1$ l'indice di X è esattamente n .

Studiamo adesso i rivestimenti ciclici di smoothing, nel seguito supporremo, salvo avviso contrario, che $(X_0, 0)$ sia una singolarità normale di dimensione 2.

Sia $X \xrightarrow{f} \mathbb{C}$ uno smoothing di $(X_0, 0)$ e supponiamo che esista un divisore di Weil D in X che è anche \mathbb{Q} -Cartier di indice n .

Consideriamo il rivestimento ciclico associato a D

$$Y \xrightarrow{p} X \xrightarrow{f} \mathbb{C}$$

dove $Y = \text{Spec}_{\mathcal{O}_X} \mathcal{A}$ $\mathcal{A} = \bigoplus_{i=0}^{n-1} \mathcal{O}_X(-iD)$. Abbiamo visto che Y è una singolarità normale e che $p^{-1}(0)$ è un unico punto che chiameremo ancora 0 . $Y \xrightarrow{f \circ p} \mathbb{C}$ è uno smoothing dello spazio

$$Y_0 = \text{Spec}_{\mathcal{O}_{X_0}} (\mathcal{A} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_{X_0})$$

Proposizione 3.3. $(Y_0, 0)$ è una singolarità isolata ridotta e irriducibile .

DIM. Y_0 è un divisore di Cartier genericamente ridotto nella varietà normale Y e quindi è ridotto, dobbiamo dimostrare l'irriducibilità o equivalentemente che $Y_0 - \{0\}$ è connesso.

Se $(V, 0)$ è un germe irriducibile di insieme analitico indicheremo in seguito con $\pi_1(V - 0)$ il gruppo fondamentale locale di $V - \{0\}$ (per la definizione si può vedere ad esempio [L] pag. 69), ricordiamo che se 0 è un punto singolare isolato $\pi_1(V - 0) = \pi_1(S_r \cap V)$ dove S_r è una sfera di Milnor relativa ad una immersione di V (cf. Milnor Theor. 2.10).

Ci occorrono due lemmi.

Lemma 3.4. Se $\pi': (X, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ è uno smoothing di una singolarità normale di dimensione 2, l'applicazione indotta

$$\pi_1(X_0 - 0) \longrightarrow \pi_1(X - 0)$$

è surgettiva.

DIM. [L-W] Lemma 5.1

□

Lemma 3.5. Siano X, Y, Z spazi analitici, $f: Z \rightarrow X$ continua, $p: Y \rightarrow X$ rivestimento non diramato

$$\begin{array}{ccc} Z \times_X Y & = & W \xrightarrow{f'} Y \\ & & \downarrow p' \quad \downarrow p \\ & & Z \xrightarrow{f} X \end{array}$$

Se $w = (z, y) \in W$ allora $p'_*\pi_1(W, w) = f_*^{-1}(p_*\pi_1(Y, y))$.

DIM. Per funtorialità vale \subset , viceversa se $\alpha \in \pi_1(Y, y)$ e $\beta \in \pi_1(Z, z)$ sono tali che $f_*(\beta) = p_*(\alpha)$ allora $p'_*(\beta \times \alpha) = \alpha$.

□

Torniamo alla dimostrazione della proposizione 3.3, $Y - \{0\} \xrightarrow{p} X - \{0\}$ è un rivestimento connesso di grado n , quindi se $y \in Y_0 - \{0\}$ per i Lemmi 3.4 e 3.5, il gruppo $p_*\pi_1(Y_0 - \{0\}, y)$ ha indice n in $\pi_1(X - \{0\}, y)$ e quindi $Y_0 - \{0\}$ è connesso.

□

A meno di prendere un divisore linearmente equivalente a D possiamo supporre che X_0 non è contenuto nel supporto di D , indichiamo con D_0 la restrizione di D a X_0 .

Abbiamo la relazione $\mathcal{O}_{X_0}(D_0) = (\mathcal{O}_X(D) \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_{X_0})^{\vee\vee}$, dove il biduale è fatto in X_0 , e quindi

$$\mathcal{A}_0 = (\mathcal{A} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_{X_0})^{\vee\vee} \quad \text{dove} \quad \mathcal{A}_0 = \bigoplus_{i=0}^{n-1} \mathcal{O}_{X_0}(-iD_0)$$

L'applicazione naturale $\mathcal{A} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_{X_0} \rightarrow \mathcal{A}_0$ induce un morfismo

$$Y'_0 = \text{Spec}_{\mathcal{O}_{X_0}} \mathcal{A}_0 \xrightarrow{\nu} Y_0$$

Ora \mathcal{A}_0 è riflessivo ed è ottenuto da $\mathcal{A} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_{X_0}$ togliendo la torsione e saturando, quindi Y'_0 è la normalizzazione di $Y_{0,rid}$.

La Prop. 3.3 ci dice che Y_0 è ridotto e irriducibile e quindi il morfismo ν è un omeomorfismo.

Corollario 3.6. Nelle notazioni precedenti l'indice del divisore D_0 è esattamente n

DIM. Infatti se così non fosse avremo che Y'_0 è formato da più componenti connesse, in contrasto con la Prop. 3.3.

□

In generale Y_0 non è normale, in [L-W] si può trovare un esempio di tale situazione con X Gorenstein e Y che non è Cohen-Macaulay, è però vero nel caso particolare di smoothing di singolarità quozienti.

Teorema 3.7. Sia $(X, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ uno smoothing di una singolarità quoziente $(X_0, 0)$ e sia $(Y, 0) \rightarrow (X, 0)$ il rivestimento ciclico associato ad un divisore \mathbb{Q} -Cartier, allora $(Y_0, 0)$ è normale e quindi una singolarità quoziente.

DIM. Sia Y'_0 la normalizzazione di Y_0 e Z una risoluzione di Y'_0

$$Z \xrightarrow{\mu} Y'_0 \xrightarrow{\nu} Y_0$$

Il genere geometrico di $(Y_0, 0)$ è per definizione $p_g(Y_0) = h^1(\mathcal{O}_Z) - \delta(Y_0)$ dove $\delta(Y_0) = \dim_{\mathbb{C}}(H^0(\mathcal{O}_{Y'_0})/H^0(\mathcal{O}_{Y_0}))$.

Per il Teorema II.3.2 Y'_0 è una singolarità quoziente quindi razionale (cf. Pinkham [Pi]) e il genere diventa

$$p_g(Y_0) = -\delta(Y_0)$$

Ora Y_0 possiede uno smoothing e per la formula di Steenbrink (Teor. 2.1)

$$p_g(Y_0) = \frac{1}{2}(\mu_0 + \mu_+) \geq 0$$

Allora necessariamente $\delta(Y_0) = 0$ cioè Y_0 è normale.

□

§4 . Smoothing \mathbb{Q} -Gorenstein di singolarità quozienti.

Sia $(X, 0) \xrightarrow{\pi'} (\mathbb{C}, 0)$ uno smoothing Gorenstein di una singolarità quoziente $(X_0, 0)$ allora per la formula di aggiunzione pure $(X_0, 0)$ è Gorenstein e quindi un punto doppio razionale.

Nell'Esempio 3.1 abbiamo costruito degli smoothing di singolarità cicliche di tipo $\frac{1}{dn^2}(1, dna - 1)$ che sono \mathbb{Q} -Gorenstein di indice n e con numero di Milnor $d - 1$. Questo paragrafo è interamente dedicato a dimostrare il viceversa, cioè che ogni smoothing \mathbb{Q} -Gorenstein di una singolarità quoziente o è Gorenstein oppure è uno di quelli descritti nell'esempio 3.1.

Teorema 4.1. Sia $(X, 0) \xrightarrow{\pi'} (\mathbb{C}, 0)$ uno smoothing \mathbb{Q} -Gorenstein di indice $n \geq 2$ di una singolarità quoziente $(X_0, 0)$.

Allora $(X, 0)$ è isomorfo a $(Y, 0)/G$ dove

$(Y, 0) \subset (\mathbb{C}^4, 0)$ è una singolarità di ipersuperficie definita da:

$$(*) \quad F = uv + y^{dn} - t^b - \varphi_1(t)y^n - \dots - \varphi_{d-1}(t)y^{(d-1)n} = 0$$

con $d, b > 0$ e $\varphi_i \in \mathbb{C}\{t\}$, $\varphi_i(0) = 0$ serie di potenze convergenti tali che la proiezione $(Y, 0) \xrightarrow{\pi} (\mathbb{C}, 0)$ sulla coordinata t definisca uno smoothing di $(Y_0, 0)$.

Il gruppo $G \simeq \mu_n$ agisce su \mathbb{C}^4 nel modo seguente

$$\mu_n \ni \xi: (u, v, y, t) \rightarrow (\xi u, \xi^{-1}v, \xi^a y, t) \quad (a, n) = 1$$

e π' è la fattorizzazione al quoziente della proiezione π .

Osservazione 4.1. Se sia Y che l'azione di G sono come descritte nel Teorema 4.1 si verifica immediatamente che G agisce liberamente su $Y - \{0\}$ e quindi siamo esattamente nelle ipotesi dell'Esempio 3.1.

L'idea della dimostrazione è abbastanza semplice e può essere riassunta in tre punti.

- 1) Se $n \geq 2$ è l'indice di X , possiamo scrivere X come il quoziente di uno smoothing Y di un punto doppio razionale per un gruppo ciclico di ordine n .
 - 2) Classificare i possibili automorfismi di smoothing di P.D.R. che agiscono liberamente al di fuori del punto singolare.
 - 3) Scrivere Y nella forma (*) usando degli opportuni cambiamenti di coordinate.
- Il primo punto, grazie ai risultati del §3 è molto facile.

Costruiamo infatti Y come il rivestimento ciclico di X associato al divisore canonico, per il Teorema 3.7 $(Y_0, 0)$ è una singolarità quoziente e per il Teorema II.3.1 Y è Gorenstein e quindi è uno smoothing di un punto doppio razionale.

Indichiamo con d la caratteristica di Eulero topologica della fibra di Milnor di X , la caratteristica di Eulero della fibra di Milnor di Y è allora esattamente dn e quindi $(Y_0, 0)$ è un P.D.R. di tipo A_{dn-1} , D_{dn-1} o E_{dn-1} .

Prima di affrontare il punto 2) dimostriamo un lemma di carattere generale.

Lemma 4.2. Sia $(V, 0) \xrightarrow{\pi} (\mathbb{C}, 0)$ una deformazione della singolarità $(V_0, 0)$ e sia G un gruppo ciclico finito che agisce su V in modo compatibile con π .

Se $n \geq 0$ è la dimensione dello spazio tangente $T_{V_0, 0}$, esiste una immersione G -equivariante φ

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{\varphi} & \mathbb{C}^n \times \mathbb{C} \\ \downarrow \pi & & \downarrow \pi_2 \\ \mathbb{C} & \xrightarrow{id} & \mathbb{C} \end{array}$$

dove π_2 è la proiezione nel secondo fattore e G agisce linearmente su $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}$, in modo diagonale e in modo banale sul secondo fattore.

DIM. Basta dimostrare che esiste una immersione G -equivariante

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{\varphi} & \mathbb{C}_x^n \times \mathbb{C}_t \\ \downarrow \pi & & \downarrow \pi_2 \\ \mathbb{C} & \xrightarrow{id} & \mathbb{C} \end{array}$$

dove G agisce linearmente su $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}$ e in modo banale sul secondo fattore.

Infatti, sia ξ un generatore di G e $r = |G|$, esiste allora un cambiamento lineare di coordinate in $\mathbb{C}^n \times \{0\}$ tale che l'azione diventa

$$\xi x_i = \alpha_i x_i + \beta_i t \quad \xi t = t$$

con $\alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta_1, \dots, \beta_n$ numeri complessi.

Se $\alpha_i = 1$ allora $x_i = \xi^r x_i = x_i + r\beta_i t$ e quindi $\beta_i = 0$, se invece $\alpha_i \neq 1$ facciamo il cambiamento di coordinate $x'_i = x_i + \frac{\beta_i}{\alpha_i - 1} t$, e si verifica immediatamente che nel nuovo sistema l'azione è diagonale.

Per il Lemma 3.1 esiste una immersione G -equivariante

$$V \xrightarrow{\varphi} \mathbb{C}_x^N \times \mathbb{C}_t$$

dove $N \geq n$ e G agisce linearmente su $\mathbb{C}^N \times \mathbb{C}$ e banalmente sulla coordinata t . Procediamo per induzione, se $N = n$ ho finito, altrimenti abbassiamo la dimensione dello spazio di arrivo di uno.

Sia I_0 l'ideale di \mathcal{O}_N che definisce $(V_0, 0)$ in $(\mathbb{C}^N, 0)$ e I l'ideale di $\mathcal{O}_N\{t\}$ che definisce $(V, 0)$ in $(\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}, 0)$.

Se $N > n$ e \mathcal{M}_0 è l'ideale massimale di \mathcal{O}_N abbiamo $I_0/(I_0 \cap \mathcal{M}_0^2) \neq 0$ ed esiste un $h \in I_0$ tale che $dh(0)$ è un autovettore per l'azione di G su $I_0/(I_0 \cap \mathcal{M}_0^2)$, diciamo $\xi dh(0) = \epsilon dh(0)$ dove ϵ è una radice r -esima di 1.

π è una deformazione, esiste quindi $H \in I$ tale che $H(x, t) = h(x) + tk(x, t)$.

Poniamo

$$F = \frac{1}{r} \sum_{i=0}^{r-1} \frac{\xi^i(H)}{\epsilon^i} = f(x) + tg(x, t)$$

ξ è lineare e lascia invariato t , quindi

$$f(x) = \frac{1}{r} \sum_{i=0}^{r-1} \frac{\xi^i(h)}{\epsilon^i} \quad \text{e} \quad df(0) = \frac{1}{r} \sum_{i=0}^{r-1} \frac{\xi^i(dh(0))}{\epsilon^i} = dh(0) \neq 0$$

F appartiene a I e Y è contenuto nell'ipersuperficie liscia $\{F = 0\} = W$.

W è G -stabile ed ha t come coordinata locale, applicando quindi il lemma di Cartan (Teor. I.4.1 e Cor. I.4.2) all'azione di G su W dimostriamo il passo induttivo.

□

Applichiamo il Lemma 4.2 allo smoothing $(Y, 0)$ del P.D.R. $(Y_0, 0)$, possiamo supporre $(Y, 0) \subset (\mathbb{C}^3 \times \mathbb{C}, 0)$ definito da

$$F = f(x, y, z) + t\varphi(x, y, z, t) = 0$$

e il gruppo $G \simeq \mu_n$ agisce linearmente in modo diagonale con autovalore 1 sulla coordinata t .

Apriamo adesso una parentesi sugli automorfismi di ordine finito dei punti doppi razionali.

Sia $X = \mathbb{C}^2/G$, $G \subset SL(2, \mathbb{C})$, un punto doppio razionale e sia τ un automorfismo del germe $(X, 0)$.

Poiché $\pi: \mathbb{C}^2 - \{0\} \rightarrow X - \{0\}$ è un rivestimento regolare con gruppo G , esistono esattamente $|G|$ rialzamenti di τ ad automorfismi di $\mathbb{C}^2 - \{0\}$ che per il teorema di estensione di Riemann-Hartogs si estendono ad automorfismi di $(\mathbb{C}^2, 0)$.

Se $H \subset Aut(X, 0)$ è un sottogruppo finito e $\Gamma \subset Aut(\mathbb{C}^2, 0)$ è l'insieme dei rialzati degli elementi di H abbiamo una successione esatta di gruppi

$$0 \longrightarrow G \longrightarrow \Gamma \longrightarrow H \longrightarrow 0$$

Se applico il lemma di Cartan al gruppo Γ posso trovare un nuovo sistema di coordinate w_1, w_2 nelle quali l'azione di Γ si linearizza.

Osserviamo che l'azione di G essendo già lineare rimane invariata nel nuovo sistema di coordinate.

Γ agisce fedelmente su $\mathbb{C}[w_1, w_2]$ e se restringiamo l'azione al sottoanello $\mathbb{C}[w_1, w_2]^G$ otteniamo una rappresentazione fedele di $\Gamma/G \cong H$, inoltre Γ agisce linearmente

e quindi ogni elemento di Γ determina un automorfismo graduato di $\mathbb{C}[w_1, w_2]$, segue che H è contenuto nel gruppo, che indicheremo con $\hat{Aut}(X, 0)$, degli automorfismi graduati di $\mathbb{C}[w_1, w_2]^G$.

I gruppi $\hat{Aut}(X, 0)$ sono descritti completamente per ogni P.D.R. nell'articolo di Catanese ([C] Th. 1.2).

Ritorniamo alla nostra situazione, $Y \subset \mathbb{C}^3 \times \mathbb{C}$ ipersuperficie definita da

$$F = f(x, y, z) + t\varphi(x, y, z, t) = 0$$

e $\pi: Y \rightarrow \mathbb{C}$ proiezione sulla coordinata t . Supponiamo che il gruppo $G \simeq \mu_n$ agisca nel modo seguente

$$\mu_n \ni \xi: (x, y, z, t, f) \rightarrow (\xi^a x, \xi^b y, \xi^c z, t, \xi^e f)$$

Y è G -stabile e quindi

$$\mu_n \ni \xi: F \rightarrow \xi^e F$$

Se vogliamo che l'azione di G sia libera su $Y - \{0\}$ gli esponenti a, b, c ed e devono soddisfare le seguenti due condizioni.

i) e deve essere congruo a zero modulo n .

Infatti la retta $R = \{x = y = z = 0\}$ è formata da punti fissi per l'azione di G , quindi deve essere $Y \cap R = \{0\}$, cioè $F(0, 0, 0, t) \neq 0$ e poiché t è G -invariante anche F lo è.

ii) a, b e c devono essere relativamente primi con n .

Supponiamo per assurdo che $(a, n) > 1$, allora esiste un $g \in G - \{id\}$ tale che $gx = x$.

g è quindi l'identità sul piano $\Pi = \{y = z = 0\}$ e poiché $Y \cap \Pi$ ha dimensione positiva abbiamo contraddetto l'ipotesi che G agisca liberamente su $Y - \{0\}$.

Per b e c la dimostrazione è identica.

Le condizioni i) e ii) serviranno come regole per stabilire se un dato automorfismo di ordine finito di un P.D.R. si può estendere ad uno smoothing in modo tale che agisca liberamente al di fuori del punto singolare.

Per ogni P.D.R. $(X, 0)$ indichiamo con f l'equazione della forma normale di $X \subset \mathbb{C}^3$ (Tabella I.4.1).

1) Tipo E_8

$$f = z^2 + x^3 + y^5 \qquad dn = 8 + 1 = 9$$

$\hat{Aut}(X, 0) = \mathbb{C}^*$ dove

$$\mathbb{C}^* \ni \lambda: (x, y, z, f) \rightarrow (\lambda^{10}x, \lambda^6y, \lambda^{15}z, \lambda^{30}f)$$

Sia ora $\mu_n \subset \hat{Aut}(X, 0)$, ci sono due possibilità

$$d = 1 \quad \mu_9 \ni \xi: (x, y, z, f) \rightarrow (\xi x, \xi^6y, \xi^6z, \xi^3f)$$

$$d = 3 \quad \mu_3 \ni \xi: (x, y, z, f) \rightarrow (\xi x, y, z, f)$$

nessuna delle due azioni soddisfa contemporaneamente i) e ii).

2) Tipo E_7

$$f = z^2 + x(y^3 + x^2) \qquad dn = 8$$

$\hat{Aut}(X, 0) = \mathbb{C}^*$ dove

$$\mathbb{C}^* \ni \lambda: (x, y, z, f) \rightarrow (\lambda^6x, \lambda^4y, \lambda^9z, \lambda^{18}f)$$

Abbiamo tre casi

$$d = 1 \quad \mu_8 \ni \xi: (x, y, z, f) \rightarrow (\xi^6x, \xi^4y, \xi z, \xi^2f)$$

$$d = 2 \quad \mu_4 \ni \xi: (x, y, z, f) \rightarrow (\xi^2x, y, \xi z, \xi^2f)$$

$$d = 4 \quad \mu_2 \ni \xi: (x, y, z, f) \rightarrow (x, y, \xi z, f)$$

Nessuno dei tre casi soddisfa i) e ii).

3) Tipo E_6

$$f = z^2 + x^3 + y^4 \qquad dn = 7$$

$\hat{Aut}(X, 0) = \mathbb{C}^* \times \mathbb{Z}_2$ dove

$$\mathbb{C}^* \ni \lambda: (x, y, z, f) \rightarrow (\lambda^4 x, \lambda^3 y, \lambda^6 z, \lambda^{12} f)$$

e \mathbb{Z}_2 è generato dall'involuzione $\tau: (x, y, z) \rightarrow (x, y, -z)$.

l'unico caso è

$$d = 1 \quad \mu_7 \ni \xi: (x, y, z, f) \rightarrow (\xi^4 x, \xi^3 y, \xi^6 z, \xi^5 f)$$

che non soddisfa i).

4) Tipo D_4

$$f = z^2 + x(y^2 + x^2) \quad dn = 5$$

Deve essere $d = 1$ e $n = 5$.

$\hat{Aut}(X, 0)$ è il sottogruppo di $GL(2, \mathbb{C}) \times \mathbb{C}^*$ formato dagli elementi (γ, λ) tali che

$$\gamma^*(x(y^2 + x^2)) = \lambda^2(x(y^2 + x^2))$$

dove γ agisce su $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ e λ su z .

Se indico con $H \simeq \mathbb{C}^* \subset \hat{Aut}(X, 0)$ il sottogruppo formato dagli elementi della forma

$$\left(\begin{pmatrix} t^2 & 0 \\ 0 & t^2 \end{pmatrix}, t^3 \right) \quad t \in \mathbb{C}^*$$

si dimostra che $\hat{Aut}(X, 0)/H \simeq \sum_3 =$ gruppo simmetrico su tre elementi.

Poichè $|\sum_3| = 6$ deve necessariamente essere $\mu_5 \subset H$, per un'azione

$$\mu_5 \ni \xi: (x, y, z, f) \rightarrow (\xi^2 x, \xi^2 y, \xi^3 z, \xi f)$$

che non soddisfa la regola i).

5) Tipo D_r

$$r \geq 5$$

$$f = z^2 + x(y^2 + x^{r-2}) \quad dn = r + 1$$

$\hat{Aut}(X, 0) = \mathbb{C}^* \times \mathbb{Z}_2$ dove

$$\mathbb{C}^* \ni \lambda: (x, y, z, f) \rightarrow (\lambda^2 x, \lambda^{r-2} y, \lambda^{r-1} z, \lambda^{2r-2} f)$$

e \mathbb{Z}_2 è generato dall'involuzione $\tau: (x, y, z) \rightarrow (x, y, -z)$.

In ogni caso l'azione è diagonale e si ha

$$\mu_n \ni \xi: (x, f) \rightarrow (\xi^2 x, \xi^{-4} f)$$

quindi se $n \neq 2, 4$ non è soddisfatta la regola i) e se $n = 2, 4$ non è soddisfatta la regola ii).

6) Tipo A_1

$$f = uv + y^2 \quad dn = 2 \Rightarrow n = 2$$

$$\hat{Aut}(X, 0) = \{g \in GL(3, \mathbb{C}) \mid g^* f = \pm f\}$$

Più generalmente, sempre in [C], è fatto uno studio dei quozienti di P.D.R. per delle involuzioni e nel caso del tipo A_1 l'unica involuzione per cui il quoziente non è un P.D.R. è, a meno di coniugio

$$\mu_2 \ni \xi: (u, v, y) \rightarrow (\xi u, \xi^{-1} v, \xi y)$$

7) Tipo A_r

$$r \geq 2$$

$$f = uv + y^{r+1} \quad dn = r + 1$$

$\hat{Aut}(X, 0) = (\mathbb{C}^*)^2 \amalg \mathbb{Z}_2$ dove

$$(\mathbb{C}^*)^2 \ni (\lambda_1, \lambda_2): (u, v, y) \rightarrow (\lambda_2 u, \lambda_1^{r+1} \lambda_2^{-1} v, \lambda_1 y)$$

e \mathbb{Z}_2 è generato dall'involuzione τ che scambia u con v .

Il prodotto fra $(\mathbb{C}^*)^2$ e \mathbb{Z}_2 è semidiretto e la legge del prodotto è la seguente

$$\tau \cdot (\lambda_1, \lambda_2) \cdot \tau = (\lambda_1, \lambda_1^{r+1} \lambda_2^{-1})$$

Sia $\mu_n \subset \hat{Aut}(X, 0)$ e ϵ un generatore di μ_n , ci sono due casi: $\epsilon = (\xi_1, \xi_2)$ oppure $\epsilon = (\xi_1, \xi_2) \cdot \tau$.

Nel primo caso sia ξ_1 che ξ_2 sono radici n -esime dell'unità e l'azione è diagonale

$$\epsilon: (u, v, y) \rightarrow (\xi_2 u, \xi_2^{-1} v, \xi_1 y)$$

Per la regola ii) ξ_2 deve essere una radice primitiva e possiamo scrivere

$$\mu_n \ni \xi: (u, v, y) \rightarrow (\xi u, \xi^{-1} v, \xi^a y)$$

a è un intero che deve essere relativamente primo con n .

Nel secondo caso, dalla regola del prodotto segue che ξ_1 è una radice n -esima di 1, consideriamo il seguente cambio di coordinate

$$\begin{cases} x = v + \xi_2 u \\ z = -\xi_2^{-1} v + u \end{cases}$$

Nel nuovo sistema $f = \frac{1}{4\xi_2}(x^2 - \xi_2^2 z^2) + y^{r+1}$, e

$$\epsilon: (x, y, z) \rightarrow (x, -z, \xi_1 y)$$

che non soddisfa la regola ii).

Riepilogando, finora abbiamo dimostrato che se $X \xrightarrow{\pi'} \mathbb{C}$ è uno smoothing \mathbb{Q} -Gorenstein di indice $n \geq 2$ di una singolarità quoziente con numero di Milnor $d - 1$ allora $X = Y/G$ dove $Y \subset \mathbb{C}^3 \times \mathbb{C}$ definito da

$$F = uv + y^{dn} + t\varphi(u, v, y, t) = 0$$

con $\varphi(0, 0, 0, t) \not\equiv 0$ e $G \simeq \mu_n$ che agisce nel modo seguente

$$\mu_n \ni \xi: (u, v, y, t) \rightarrow (\xi u, \xi^{-1} v, \xi^a y, t) \quad (a, n) = 1$$

Associamo adesso ad ogni monomio un peso modulo n , cioè un omomorfismo di gruppi fra il reticolo dei monomi $M \simeq \mathbb{Z}^4$ e \mathbb{Z}_n , che vale $1, -1, a, 0$ sugli elementi u, v, y, t rispettivamente.

Diremo che una serie di potenze (formale o convergente) è omogenea di peso d (mod n) se ogni monomio che vi compare ha peso d (mod n).

Supponiamo di avere un cambiamento locale di coordinate nello 0 del seguente tipo

$$(**) \quad \begin{cases} u' = u + p(u, v, y, t) \\ v' = v + q(u, v, y, t) \\ y' = y + r(u, v, y, t) \\ t' = t \end{cases}$$

dove p, q e r sono serie di potenze convergenti omogenee di peso rispettivamente $1, -1$ e a (mod n).

Nel nuovo sistema di coordinate l'azione di G è ancora diagonale e con gli stessi autovalori che aveva nel vecchio sistema.

Indichiamo con \mathcal{M} e \mathcal{M}_h gli ideali massimali degli anelli locali $\mathbb{C}[[u, v, y, t]]$ e $\mathbb{C}\{u, v, y, t\}$ rispettivamente.

Lemma 4.3. Con le notazioni precedenti se $\psi \in \mathcal{M}_h^2$ è omogeneo di peso 0 (mod n) esistono $p, q \in \mathcal{M}_h^2$ omogenei di peso 1 e -1 rispettivamente e tali che

- i) $(u + p)(v + q) = uv + t\psi - g(y, t)$
- ii) $g(y, 0) = 0$

DIM. Osserviamo che i) \Rightarrow ii), infatti $g(y, 0) = p(0, 0, y, 0)q(0, 0, y, 0)$, e se $p(0, 0, y, 0) \not\equiv 0$ al primo membro di i) compare il monomio vy^k per qualche k che però non può comparire al secondo membro.

Supponiamo prima $\psi \in \mathcal{M}^2$, sono allora unicamente determinate delle serie formali

$$q_n(u, v, y, t), p_n(v, y, t), g_n(y, t) \quad n \geq 1$$

tali che

$$\begin{cases} uq_1 + vp_1 + g_1 = t\psi \\ uq_n + vp_n + g_n = -(p_{n-1} \sum_{i=1}^{n-2} q_i + q_{n-1} \sum_{i=1}^{n-2} p_i + p_{n-1}q_{n-1}) \quad n \geq 2 \end{cases}$$

Si ha evidentemente $p_n, q_n \in \mathcal{M}^{n+1}$ e $g_n \in \mathcal{M}^{n+2}$, se poniamo quindi

$$p = \sum_{n=1}^{+\infty} p_n \quad q = \sum_{n=1}^{+\infty} q_n \quad g = \sum_{n=1}^{+\infty} g_n$$

si verifica facilmente che

$$(u + p)(v + q) = uv + t\psi - g$$

Passiamo adesso al caso olomorfo, dimostriamo che se $\psi \in \mathcal{M}_h^2$ allora le funzioni p, q e g definite nel caso formale sono olomorfe.

Per $\rho > 0$ e $f = \sum_{I \in \mathbb{N}^4} \alpha_I w^I$ $w = (u, v, y, t)$ $I = (i_1, \dots, i_4)$, si definisce

$$\|f\|_\rho = \sum_{I \in \mathbb{N}^4} |\alpha_I| \rho^{|I|} \in [0, +\infty] \quad |I| = i_1 + \dots + i_4$$

e prendiamo ρ abbastanza piccolo tale che $\|t\psi\|_\rho < \rho^2/4$.

Per ogni $n > 0$ abbiamo la relazione

$$\rho \|q_n\|_\rho + \rho \|p_n\|_\rho + \|g_n\|_\rho = \|uq_n + vp_n + g_n\|_\rho$$

da questo segue con una facile induzione che per ogni $n > 0$

$$\|p_n\|_\rho, \|q_n\|_\rho, \|g_n\|_\rho \in [0, +\infty[$$

Poniamo $\delta_n = \|p_n\|_\rho + \|q_n\|_\rho$, abbiamo

$$\rho \delta_1 \leq \|t\psi\|_\rho \leq \frac{\rho^2}{4} \Rightarrow \delta_1 \leq \frac{\rho}{4}$$

$$\rho \delta_2 \leq \|p_1\|_\rho \|q_1\|_\rho \leq \frac{\rho^2}{16} \Rightarrow \delta_2 \leq \frac{\rho}{16}$$

Dimostriamo per induzione che per ogni $n \geq 2$ si ha $\delta_n \leq \rho/2^{n+2}$

$$\begin{aligned} \rho \delta_{n+1} &\leq \left(\|p_n\|_\rho \sum_{i=1}^{n-1} \|q_i\|_\rho + \|q_n\|_\rho \sum_{i=1}^{n-1} \|p_i\|_\rho + \|p_n\|_\rho \|q_n\|_\rho \right) \\ &\leq \left(\|p_n\|_\rho \sum_{i=1}^n \delta_i + \|q_n\|_\rho \sum_{i=1}^n \delta_i \right) \\ &\leq \delta_n \sum_{i=1}^n \delta_i \end{aligned}$$

Se $n \geq 2$

$$\delta_{n+1} \leq \frac{1}{\rho} \delta_n \sum_{i=1}^n \delta_i \leq \frac{\rho}{2^{n+2}} \left(\frac{1}{4} + \sum_{i=2}^n \frac{1}{2^{i+2}} \right) \leq \frac{\rho}{2^{n+3}}$$

La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \delta_n$ è convergente e quindi le serie p , q e g sono convergenti.

□

Grazie al Lemma 4.3 possiamo trovare un cambiamento di coordinate di tipo (**)
con $r = 0$ e tale che nel nuovo sistema la funzione F ha la forma

$$F = uv + y^{dn} + t\varphi(y, t)$$

Infatti basta applicare il Lemma 4.3 alla funzione

$$\psi(u, v, y, t) = \varphi(u, v, y, t) - \varphi(0, 0, y, t)$$

Si tratta di una serie convergente omogenea di peso $0 \pmod{n}$ e per motivi di peso non può avere parte lineare.

Sempre per ragioni di peso deve essere $t\varphi(y, t) = g(y^n, t)$ e per il teorema di preparazione di Weierstrass esistono unicità una unità $e(s, t)$ e funzioni $\varphi_0(t), \dots, \varphi_{d-1}(t)$ appartenenti all'ideale massimale di $\mathbb{C}\{t\}$ tali che

$$s^d + g(s, t) = e(s, t)(s^d + \varphi_{d-1}(t)s^{d-1} + \dots + \varphi_0(t))$$

Con il cambiamento di coordinate $u' = ue^{-1}(y^n, t)$, $v' = v$ la F diventa

$$F = e(y^n, t)(u'v' + y^{dn} + \varphi_{d-1}(t)y^{(d-1)n} + \dots + \varphi_0(t))$$

$e(y^n, t)$ è una unità G -invariante, e possiamo eliminarla dall'espressione di F , inoltre G agisce liberamente su $Y - \{0\}$, quindi $\varphi_0 \neq 0$ e con un semplice cambio sulla variabile t possiamo finalmente dare a F la forma (*) e concludere così la dimostrazione del Teorema 4.1.

□

Osservazione 4.2. Il Teorema 4.1 non è un risultato nuovo, è infatti comparso con un enunciato essenzialmente equivalente in ([K-S] Prop. 3.10).

La dimostrazione di Kollàr e Shepherd-Barron si basa sulla teoria delle singolarità canoniche e precisamente sui seguenti fatti:

- 1) Ogni smoothing \mathbb{Q} -Gorenstein ad un parametro di una singolarità quoziente di dimensione 2 è terminale ([K-S] Cor. 3.6).
- 2) Classificazione delle singolarità terminali di dimensione 3 (Teorema di Mori) ([K-S] Th. 6.4).

Capitolo IV : Degenerazioni di superfici razionali

§1 . Generalità sulle degenerazioni

Sia $\Delta \subset \mathbb{C}$ il disco unitario, $\Delta^* = \Delta - \{0\}$, X uno spazio complesso tridimensionale.

Chiameremo degenerazione un morfismo $f: X \rightarrow \Delta$ olomorfo, proprio, piatto e liscio su Δ^* . Chiameremo inoltre $X_0 = f^{-1}(0)$ fibra centrale o singolare e $X_t = f^{-1}(t)$, $t \neq 0$ fibra generica o liscia.

Definizione 1.1. Una degenerazione $f: X \rightarrow \Delta$ si dice *normale* se X_0 è un divisore ridotto e normale.

Definizione 1.2. Una degenerazione $f: X \rightarrow \Delta$ si dice *proiettiva* se esiste un diagramma commutativo

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\varphi} & \Delta \times \mathbb{P}^n \\ \downarrow f & & \downarrow \pi_1 \\ \Delta & \xrightarrow{id} & \Delta \end{array}$$

dove φ è una immersione chiusa e π_1 è la proiezione su Δ .

Introduciamo adesso alcune notazioni che manterremo in seguito.

Se $f: X \rightarrow \Delta$ è una degenerazione, indichiamo con $S(X)$ e $S(X_0)$ i sottoinsiemi dei punti singolari di X e X_0 rispettivamente e con $U = X - S(X)$ e $U_0 = X_0 - S(X_0)$ i rispettivi aperti dei punti regolari.

Osserviamo che $S(X) \subset S(X_0) \subset X_0$.

Proposizione 1.1. Se $f: X \rightarrow \Delta$ è una degenerazione normale, allora X è normale e Cohen-Macaulay.

DIM. Per ipotesi X_t è liscio $\forall t \neq 0$ e X_0 è normale, da questo segue che per ogni $x \in X$ l'anello $\mathcal{O}_{X,x}$ è un dominio di integrità.

Se $x \in U$, $\mathcal{O}_{X,x}$ è regolare e a maggior ragione C.M. e integralmente chiuso.

Se $x \in S(X) \subset X_0$, poiché X_0 è un divisore di Cartier normale l'anello $\mathcal{O}_{X,x}$ è C.M., inoltre x è un punto singolare isolato e per il criterio di Serre $\mathcal{O}_{X,x}$ è integralmente chiuso.

□

Data una superficie liscia e proiettiva S esiste un metodo classico per costruire delle degenerazioni proiettive di S .

Supponiamo $S \subset \mathbb{P}^N$, sia H un iperpiano di \mathbb{P}^N tale che $Y = S \cap H$ sia una curva liscia, e sia $C(S) \subset \mathbb{P}^{N+1}$ il cono proiettivo su S .

Possiamo prendere delle coordinate omogenee (x_0, \dots, x_N, s) di \mathbb{P}^{N+1} tali che $\mathbb{P}^N = \{s = 0\}$, $H = \{s = x_0 = 0\}$ e il vertice del cono $C(S)$ ha coordinata $(0, \dots, 0, 1)$.

Prendiamo come spazio globale X il seguente sottospazio di $\mathbb{P}^{N+1} \times \mathbb{C}_t$

$$X = \{(x, s, t) \in \mathbb{P}^{N+1} \times \mathbb{C}_t \mid x_0 = ts, (x, s) \in C(S)\}$$

e come $f: X \rightarrow \mathbb{C}$ la restrizione a X della proiezione sulla coordinata t .

Si vede immediatamente che per $t \neq 0$ $X_t \simeq S$ e che X_0 è il cono proiettivo sulla curva $Y \subset H$.

Osserviamo che la degenerazione è normale se e soltanto se la curva Y è proiettivamente normale in H oppure se e soltanto se S è proiettivamente C.M. in \mathbb{P}^N .

Nel seguito supporremo sempre, salvo avviso contrario, che $f: X \rightarrow \Delta$ sia una degenerazione normale.

Se \mathcal{F} è un fascio coerente su X e $t \in \Delta$ indico con \mathcal{F}_t la restrizione di \mathcal{F} a X_t , cioè lo \mathcal{O}_{X_t} -modulo coerente $\mathcal{F} \otimes \mathcal{O}_{X_t}$.

Lemma 1.2. Sia \mathcal{F} un fascio coerente su X , se \mathcal{F} è riflessivo e localmente libero su U , allora \mathcal{F}_0 è privo di torsione.

DIM. (cf. [E-V] Lemma 2.1). Indichiamo con $i: U \rightarrow X$ l'immersione naturale e con $i_0: U \cap X_0 \rightarrow X_0$ la restrizione a X_0 .

Tensorizzando per \mathcal{F} la successione esatta

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_X(-X_0) \longrightarrow \mathcal{O}_X \longrightarrow \mathcal{O}_{X_0} \longrightarrow 0$$

otteniamo la successione esatta

$$(*) \quad \mathcal{F}(-X_0) = \mathcal{F} \otimes \mathcal{O}_X(-X_0) \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F}_0 \longrightarrow 0$$

\mathcal{F} è localmente libero su U e quindi abbiamo un'altra successione esatta

$$0 \longrightarrow i^* \mathcal{F}(-X_0) \longrightarrow i^* \mathcal{F} \longrightarrow i_0^* \mathcal{F}_0 \longrightarrow 0$$

e applicando il funtore esatto a sinistra i_*

$$0 \longrightarrow i_* i^* \mathcal{F}(-X_0) \longrightarrow i_* i^* \mathcal{F} \longrightarrow i_{0*} i_0^* \mathcal{F}_0$$

La riflessività è una proprietà locale, perciò se tensorizziamo un fascio riflessivo per un fascio localmente libero otteniamo ancora un fascio riflessivo, nel nostro caso $\mathcal{F}(-X_0)$ è riflessivo e abbiamo una successione esatta

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}(-X_0) \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow i_{0*} i_0^* \mathcal{F}_0$$

Confrontando quest'ultima con la (*) si ottiene $\mathcal{F}_0 \subset i_{0*} i_0^* \mathcal{F}_0$ da cui la tesi. □

Se Y è una varietà normale e $n \in \mathbb{Z}$, possiamo definire il fascio n -canonico $\omega_Y^{(n)} = (\omega_Y^{\otimes n})^{\vee\vee}$ e lo n -esimo plurigenere $p_n(Y) = h^0(Y, \omega_Y^{(n)})$.

Ricordiamo il seguente criterio di piattezza molto utile

Lemma 1.3. Se A è un anello a ideali principali un A -modulo è piatto se e soltanto se è privo di torsione.

DIM. Hartshorne [H] III.9.1.3.

□

Corollario 1.4. Se $f: X \rightarrow \Delta$ è una degenerazione normale, allora per ogni intero n vale la relazione $p_n(X_0) \geq p_n(X_t)$ per t in un intorno di 0.

DIM. Il fascio $\omega_X^{(n)}$ è riflessivo e per il Lemma 1.3 è piatto su Δ , per semicontinuità $h^0(X_0, (\omega_X^{(n)})_0) \geq h^0(X_t, (\omega_X^{(n)})_t)$ per t in un intorno di 0.

Dalla formula di aggiunta si ricava immediatamente che $\omega_{X_t}^{(n)} = (\omega_X^{(n)})_t$ e $\omega_{X_0}^{(n)} = (\omega_X^{(n)})_0^{\vee\vee}$.

La tesi segue dunque dal Lemma 1.2.

□

§2 . Degenerazioni normali proiettive di superfici razionali

Sia $f: X \rightarrow \Delta$ una degenerazione normale e proiettiva con X_t superficie razionale per ogni $t \neq 0$.

Prima di specializzare la nostra attenzione, nel prossimo paragrafo al caso in cui le singolarità di X_0 sono razionali e nel prossimo capitolo al caso $X_t \simeq \mathbb{P}^2 \quad \forall t \neq 0$, esponiamo alcuni risultati di carattere generale.

I risultati di cui parleremo sono dimostrati nell'articolo di Badescu ([B]), al quale rimandiamo per maggiori dettagli.

Riporteremo solo alcune dimostrazioni, essenzialmente quelle per cui sono possibili sensibili semplificazioni, rimandando per le altre al riferimento sopra citato.

Se Y è una superficie normale proiettiva possiamo definire i seguenti invarianti numerici di Y

$$\text{la irregolarità} \quad q(Y) = h^1(Y, \mathcal{O}_Y)$$

il genere geometrico $p_g(Y) = h^2(Y, \mathcal{O}_Y)$

il numero di Picard $\rho(Y) = \dim NS(Y) \otimes \mathbb{Q}$

dove $NS(Y) = Pic(Y)/Pic^0(Y)$ è il gruppo di Neron-Severi di Y .

Osserviamo che per dualità $p_g(Y) = h^2(\mathcal{O}_Y) = h^0(\omega_Y) = p_1(Y)$.

Lemma 2.1. Se $f: X \rightarrow \Delta$ è una degenerazione normale proiettiva con X_t superficie razionale $\forall t \neq 0$, allora $p_g(X_0) = q(X_0) = 0$

DIM. [B] Lemma 1.1.

□

Corollario 2.2. Nelle ipotesi del Lemma 2.1, l'applicazione naturale di restrizione $Pic(X) \rightarrow Pic(X_0)$ è bigettiva e $\rho(X_0) \leq \rho(X_t) \forall t \in \Delta$

DIM. (cf. Badescu [B] Lemma 1.2) Dal Lemma 2.1 segue che per ogni $t \in \Delta$ $Pic^0(X_t) = H^1(\mathcal{O}_{X_t}) = 0$, quindi $\rho(X_t) = \text{rango} Pic(X_t)$ e dalla successione esponenziale su X_t troviamo $Pic(X_t) \simeq H^2(X_t, \mathbb{Z})$ per ogni $t \in \Delta$.

Si può dimostrare che il morfismo di restrizione $H^2(X, \mathbb{Z}) \rightarrow H^2(X_0, \mathbb{Z})$ è un isomorfismo ([B-P-V] Th. I.8.8) e usando lo stesso ragionamento fatto nella dimostrazione del Lemma I.3.1. si dimostra che $Pic(X) \simeq Pic(X_0)$.

Sia ora $\mathcal{L} \in Pic(X)$ tale che $\mathcal{L}_t \in Pic(X_t)$ sia il fascio banale per qualche $t \in \Delta$, ragionando esattamente come nella dimostrazione del Teorema I.3.2. parte ii) si dimostra che $\mathcal{L} = 0$, cioè che l'applicazione di restrizione $Pic(X) \rightarrow Pic(X_t)$ è iniettiva e quindi $\rho(X_0) = \rho(X) \leq \rho(X_t)$.

□

Proposizione 2.3. Sia $f: X \rightarrow \Delta$ una degenerazione normale proiettiva con la fibra generica superficie razionale.

Se $K_t^2 \geq 0$ per $t \neq 0$ (K_t divisore canonico di X_t), allora $p_n(X_0) = 0 \forall n \geq 1$.

DIM. (cf. [B] Prop 2.1) Per la formula di Riemann-Roch se $t \neq 0$ abbiamo

$$p_{-1}(X_t) = h^0(X_t, -K_t) \geq 1 + \frac{1}{2}(-K_t) \cdot (-2K_t) \geq 1$$

e per il Corollario 1.4 $p_{-1}(X_0) \geq 1$.

Sia $0 \neq s \in H^0(U_0, -K_{U_0}) = H^0(X_0, -K_0)$ e supponiamo per assurdo che $p_n(X_0) \geq 1$ per qualche $n \geq 1$.

Allora $0 \neq s^{\otimes n} \in H^0(U_0, -nK_{U_0}) = H^0(X_0, -nK_0)$ e poiché X_0 è completa il fascio n -canonico di X_0 è banale.

In particolare $s^{\otimes n}$ è una sezione costante e necessariamente pure s è costante, cioè $\omega_{X_0} = \mathcal{O}_{X_0}$, in contraddizione con il Lemma 2.1.

□

Osservazione 2.1. Badescu dà anche un'altra dimostrazione della Prop. 2.3 che vale nella ipotesi che $K_t^2 > 0$, ma che può essere facilmente estesa al caso in cui la dimensione di Kodaira del fascio anticanonico in X_t è positiva (cf [B] Remark 2.2).

Adesso vogliamo studiare le superfici normali Y tali che $q(Y) = p_n(Y) = 0 \forall n \geq 0$.

Per semplificare gli enunciati introduciamo le seguenti due classi di superfici normali proiettive.

(A) La superficie Y si dice appartenente alla classe (A) se le singolarità di Y sono razionali e la risoluzione minimale di Y è una superficie razionale.

(B) La superficie Y si dice appartenente alla classe (B) se valgono le seguenti proprietà:

- i) Y ha esattamente una singolarità non razionale (Y, y) di genere geometrico $q > 0$
- ii) La risoluzione minimale $Y' \xrightarrow{u} Y$ è una superficie rigata di irregolarità q
- iii) La curva eccezionale $u^{-1}(y)$ è formata da una sezione della fibrazione canonica $Y' \xrightarrow{\pi} B$, B curva liscia di genere q , più possibilmente da componenti irriducibili delle fibre degeneri di π .

Teorema 2.4. Sia Y superficie normale proiettiva con $q(Y) = p_n(Y) = 0 \forall n \geq 1$.

Se le singolarità di Y sono razionali Y appartiene alla classe (A).

DIM. Sia $Y' \xrightarrow{u} Y$ la risoluzione minimale, l'aperto Y_{reg} dei punti regolari di Y è un aperto di Zariski in Y' e quindi per ogni intero n

$$p_n(Y') = h^0(Y', \omega_{Y'}^{\otimes n}) \leq h^0(Y_{reg}, \omega_{Y_{reg}}^{\otimes n}) = p_n(Y)$$

in particolare $p_n(Y') = 0 \quad \forall n \geq 1$ e per il criterio di Enriques ([Be] Th. VI.17), Y' è una superficie rigata.

Occorre dimostrare che $q(Y') = 0$, ma questo segue immediatamente dalla ipotesi che le singolarità di Y sono razionali e dalla successione spettrale di Leray.

□

Teorema 2.5. Sia Y superficie normale proiettiva con $q(Y) = p_n(Y) = 0 \quad \forall n \geq 1$. Se Y possiede almeno una singolarità non razionale allora appartiene alla classe (B).

DIM. Badescu [B] Th. 2.3.

□

§3 . Degenerazioni con singolarità razionali

Nel §2 abbiamo dimostrato che se $f: X \rightarrow \Delta$ è una degenerazione normale proiettiva di superfici razionali e se X_0 ha al più singolarità razionali, allora la risoluzione minimale $Y \xrightarrow{u} X_0$ è una superficie razionale.

In particolare se $X_0 \neq \mathbb{P}^2$ esiste una superficie di Segre-Hirzebruch $\mathbb{F}_n, n \geq 0$ che è dominata da Y

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{F}_n & \xleftarrow{\mu} & Y \\ & & \downarrow u \\ & & X_0 \end{array}$$

dove μ è la composizione di $q(Y) - 2$ scoppiamenti.

Se Y è una superficie liscia e proiettiva, dal teorema di fattorizzazione dei morfismi birazionali segue che l'invariante numerico $N(Y) = K_Y^2 + \rho(Y)$ è un invariante birazionale, ad esempio se Y è una superficie razionale $N(Y) = 10$.

Se per una superficie normale proiettiva Y definiamo $N(Y) = N(Y')$ dove Y' è una risoluzione di Y , è chiaro che $N(Y)$ è un invariante birazionale nella categoria delle superfici normali proiettive.

Cerchiamo adesso per le superfici Y che hanno al più singolarità razionali una espressione alternativa di $N(Y)$ nella quale intervengono invarianti numerici di Y e contributi locali dei punti singolari.

Sia (Y, y) una singolarità razionale di superficie, $(Z, C) \xrightarrow{u} (Y, y)$ la risoluzione minimale e $C = \cup_{i=1}^r C_i$ la decomposizione in componenti irriducibili della curva eccezionale $C = u^{-1}(y)_{rid}$.

È definito in modo naturale un omomorfismo di gruppi

$$Pic(Z) \xrightarrow{d} H^2(C, \mathbb{Z}) = \bigoplus_{i=1}^r H^2(C_i, \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}^r$$

che associa ad ogni fascio invertibile su Z i gradi delle restrizioni alle componenti di C , che ricordiamo, sono tutte curve lisce razionali.

Si dimostra che se prendiamo un rappresentante Y sufficientemente piccolo, allora d è un isomorfismo e quindi ogni fascio invertibile su Z è unicamente determinato dalla sua restrizione a C (cf. [A1], [B-P-V]).

Una conseguenza è che ogni divisore di Weil su Y è \mathbb{Q} -Cartier.

Infatti la matrice di intersezione $(C_i \cdot C_j)$ è definita negativa per il teorema di Mumford ([Mu] pag. 6) e quindi se D è un divisore di Weil in Y esiste un unico divisore \mathbb{Q} -Cartier F con supporto in C tale che $(F + \tilde{D}) \cdot C_i = 0$ per ogni i , dove \tilde{D} è la chiusura in Z del divisore $D|_{Y - \{y\}}$.

Se n è il minimo comune denominatore dei coefficienti di F si ha che $n\tilde{D}$ è il fascio banale su $Z - C$ e quindi nD è principale.

In una superficie normale Y indichiamo con $Div_c(Y)$ il gruppo dei divisori di Weil a supporto compatto, se Y ha al più un numero finito di singolarità razionali, per quanto appena visto possiamo definire un prodotto di intersezione

$$Div_c(Y) \times Div(Y) \longrightarrow \mathbb{Q}$$

semplicemente estendendo per bilinearità il prodotto di intersezione definito sui divisori di Cartier.

Supponiamo per semplicità che Y sia compatta, $L, D \in Div(Y)$, $n, m \in \mathbb{Z}$ tali che $nL, mD \in CaDiv(Y)$, allora $L \cdot D \in \frac{1}{(n, m)}\mathbb{Z}$, come si vede subito dalle seguenti relazioni

$$\begin{aligned} L \cdot D &= \frac{1}{m} \deg_L(mD) \in \frac{1}{m}\mathbb{Z} \\ L \cdot D &= \frac{1}{n} \deg_D(nL) \in \frac{1}{n}\mathbb{Z} \end{aligned}$$

Consideriamo adesso una risoluzione $(Z, C) \xrightarrow{u} (Y, y)$ di una singolarità razionale (Y, y) , possiamo allora scrivere $K_Z = u^*K_Y + F$, dove F è un divisore \mathbb{Q} -Cartier con supporto contenuto in C e u^*K_Y è il pull-back come divisore \mathbb{Q} -Cartier del divisore canonico di Y .

Per linearità deve essere $u^*K_Y \cdot C_i = 0 \quad \forall i = 1, \dots, r$ e F è unicamente determinato dalle condizioni

$$F \cdot C_i = K_Z \cdot C_i = -2 - C_i^2$$

È facile vedere che il numero $\beta(y) = b_2(C) + F^2$ non dipende dalla particolare risoluzione ma solamente dalla singolarità (Y, y) .

Infatti basta dimostrare l'invarianza per uno scoppimento

$$Z' \xrightarrow{\mu} Z \xrightarrow{u} Y \quad E \text{ curva eccezionale di } \mu$$

Dalla formula di aggiunzione per gli scoppimenti

$$K_{Z'} = \mu^*K_Z + E = (u \circ \mu)^*K_Y + \mu^*F + E$$

e inoltre $(\mu^*F + E)^2 = F^2 - 1$, mentre $b_2(C \cup E) = b_2(C) + 1$.

A questo punto è chiaro che se Y è una superficie normale proiettiva con al più singolarità razionali vale

$$N(Y) = K_Y^2 + \varrho(Y) + \sum_{y \in S(Y)} \beta(y)$$

Ritorniamo alle degenerazioni, per quanto visto finora, nelle ipotesi descritte all'inizio del paragrafo vale la relazione

$$(3.0) \quad 10 = N(X_0) = K_{X_0}^2 + \varrho(X_0) + \sum_{x \in S(X_0)} \beta(x)$$

Per il Cor. 2.2, $1 \leq \varrho(X_0) \leq \varrho(X_t)$, cerchiamo adesso delle restrizioni su $K_{X_0}^2$ e sugli invarianti β .

Proposizione 3.1. Sia $f: X \rightarrow \Delta$ una degenerazione normale proiettiva di superfici razionali tale che la fibra centrale abbia al più singolarità razionali e sia L un divisore di Weil il cui supporto non contiene X_0 (condizione sempre soddisfatta a meno di equivalenza lineare), allora

- i) $L_0^2 \geq L_t^2 \quad \forall t \in \Delta$
- ii) Se L è \mathbb{Q} -Cartier $L_0^2 = L_t^2 \quad \forall t \in \Delta$
- iii) Se $\varrho(X_t) \leq 2$ allora $K_0^2 = K_t^2 \iff X$ è \mathbb{Q} -Gorenstein

DIM. i) Per il Corollario 2.2 esiste un divisore di Cartier T in X tale che $T_0 = nL_0$ per qualche $n > 0$, se poniamo $D = T - nL$ abbiamo

$$n^2 L_0^2 = T_0^2 = T_t^2 = n^2 L_t^2 + 2n L_t \cdot D_t + D_t^2$$

Se $a \in \mathbb{Z}$ per il Lemma 1.2 $\mathcal{O}_X(anL)_0 \subset \mathcal{O}_{X_0}(anL_0) = \mathcal{O}_X(aT)_0$ e poiché tale inclusione è un isomorfismo al di fuori dei punti singolari

$$\chi(\mathcal{O}_X(anL)_0) \leq \chi(\mathcal{O}_X(aT)_0)$$

$$\chi(\mathcal{O}_X(anL)_t) \leq \chi(\mathcal{O}_X(aT)_t)$$

dove la seconda disuguaglianza segue dalla prima e dal teorema di invarianza della χ .

Per la formula di Riemann-Roch sulla superficie X_t la seconda disuguaglianza è equivalente alla

$$1 + \frac{1}{2}(anL_t) \cdot (anL_t - K_t) \leq 1 + \frac{1}{2}(anL_t + aD_t) \cdot (anL_t + aD_t - K_t)$$

che per $a \neq 0$ semplificando diventa

$$\frac{D_t \cdot K_t}{a} \leq 2nL_t \cdot D_t + D_t^2$$

Sostituendo quest'ultima nell'espressione per T_0^2 e dividendo per n^2 troviamo finalmente

$$L_0^2 \geq L_t^2 + \frac{D_t \cdot K_t}{an^2}$$

e poiché a è arbitrario segue i).

ii) Ovvio.

iii) Manteniamo le stesse notazioni del punto i) con $L = K_X$, se $K_0^2 = K_t^2$ allora $D_t \cdot K_t = D_t^2 = 0$ e se $\varrho(X_t) \leq 2$ deve essere necessariamente $D_t = 0$ per ogni $t \in \Delta$ e quindi $D = 0$.

□

Esempio 3.1. Consideriamo la superficie $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ immersa in \mathbb{P}^5 dal sistema lineare completo associato ad un divisore di bigrado $(2, 1)$.

Poniamo $f: X \rightarrow \mathbb{C}$ la degenerazione ottenuta con il procedimento descritto nel §1, allora $X_t \simeq \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ se $t \neq 0$ e quindi $K_t^2 = 8$, mentre X_0 è il cono proiettivo sulla curva razionale di grado 4 in \mathbb{P}^4 e quindi $K_0^2 = 9$.

In particolare X non è \mathbb{Q} -Gorenstein (cf. [C] Lemma 3.6).

Teorema 3.2. Sia $f: X \rightarrow \Delta$ una degenerazione normale proiettiva tale che X_0 ha al più singolarità razionali, se X è \mathbb{Q} -Gorenstein allora gli invarianti $\beta(p)$ associati ai punti singolari di X_0 sono interi.

DIM. Fissiamo un punto singolare $p \in S(X_0)$, e consideriamo un morfismo $Y \xrightarrow{u} X$ che sia un biolomorfismo su $X - \{p\}$, una risoluzione di X in un intorno di p e tale che il trasformato proprio Y_0 di X_0 in Y sia una risoluzione di X_0 in un intorno di p .

Dalla definizione di $\beta(p)$ si ha $\beta(p) = K_{Y_0}^2 - K_{X_0}^2 + b_2(u^{-1}(p) \cap Y_0)$ e poiché $K_{X_0}^2 = K_{X_t}^2 \in \mathbb{Z}$ basta dimostrare che $K_{Y_0}^2 \in \mathbb{Z}$.

Se $t \neq 0$ e $u^*(X_0) = Y_0 + P$ abbiamo

$$K_{Y_t}^2 = K_Y^2 \cdot Y_t = (K_Y + Y_0)^2 \cdot Y_t = (K_Y + Y_0)^2 \cdot (Y_0 + P)$$

e dalla formula di aggiunta

$$K_{Y_t}^2 = (K_Y + Y_0)^2 \cdot (Y_0 + P) = K_{Y_0}^2 + (K_Y + Y_0)^2 \cdot P$$

In un intorno di P sia K_Y che Y_0 sono divisori di Cartier e quindi il secondo addendo che si trova a destra nell'ultima espressione è un numero intero.

□

Esempio 3.2. Calcoliamo l'invariante β associato al vertice del cono X sulla curva razionale di grado n in \mathbb{P}^n per ogni $n \geq 2$.

Il divisore eccezionale della risoluzione minimale $Y \xrightarrow{u} X$ è formato da una sola curva razionale E ad autointersezione $-n$.

Se $K_Y = u^*K_X + F$ e $F = aE$, allora

$$-na = F \cdot E = -2 - E^2 = n - 2 \quad \Rightarrow \quad a = \frac{2 - n}{n}$$

e quindi

$$\beta = 1 + F^2 = 1 - \frac{(n-2)^2}{n} = \frac{n - (n-2)^2}{n}$$

In particolare β è intero se e soltanto se $n = 2, 4$.

§4 . Combinatorica delle singolarità cicliche

Terminiamo il capitolo indagando fra le relazioni che collegano l'invariante β e il tipo di una singolarità ciclica di dimensione 2.

Data una singolarità razionale $(X, 0)$ chiameremo diagramma di Dynkin associato il grafo duale della curva eccezionale sulla risoluzione minimale con indicato per ogni vertice il coefficiente di autointersezione della curva corrispondente.

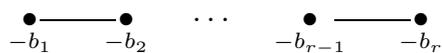
Per quanto riguarda lo studio della risoluzione minimale delle singolarità cicliche rimandiamo a [B-P-V] §III.5 oppure a [K-K-M-S] pag. 35, noi ci limiteremo a riportare, senza dimostrazioni, i fatti principali.

Per esigenze grafiche introduciamo un nuovo simbolo, se b_1, \dots, b_r sono numeri interi ≥ 2 , poniamo

$$[b_1, \dots, b_r] = b_1 - \frac{1}{b_2 - \frac{1}{\ddots - \frac{1}{b_r}}} \in \mathbb{Q}$$

Definizione 4.1. Una curva $C = \cup_{i=1}^r C_i$, $C_i \simeq \mathbb{P}^1$, immersa in una superficie S si dice una *stringa di Hirzebruch-Jung* se valgono:

- i) C è semistabile, cioè se per ogni coppia di componenti irriducibili distinte queste si intersecano trasversalmente e se ogni terna di componenti irriducibili distinte ha intersezione vuota.
- ii) $-C_i^2 = b_i \geq 2$
- iii) Il grafo duale di C ha la seguente forma



La matrice di intersezione $(C_i \cdot C_j)$ di una stringa è definita negativa e per il Teorema di Grauert ([B-P-V] Th. III.2.1) C è una curva eccezionale.

Se Y è la superficie ottenuta da S contraendo la curva C in y , allora la singolarità (Y, y) è ciclica di tipo $\frac{1}{n}(1, q)$ con $(n, q) = 1$ e $\frac{n}{q} = [b_1, \dots, b_r]$.

Osservazione 4.1. Se $0 < q' < n$ è tale che $qq' \equiv 1 \pmod{n}$ allora

$$\frac{n}{q} = [b_1, \dots, b_r] \iff \frac{n}{q'} = [b_r, \dots, b_1]$$

Ciò dipende sostanzialmente dal fatto che le azioni di μ_n su \mathbb{C}^2 che danno luogo alle singolarità cicliche di tipo $\frac{1}{n}(1, q)$ e $\frac{1}{n}(1, q')$ si ottengono l'una dall'altra tramite l'automorfismo lineare che scambia i vettori della base canonica di \mathbb{C}^2 (vedere comunque [B-P- V] pag. 81 per una dimostrazione completa).

Fissiamo una stringa $\bullet \xrightarrow{-b_1} \bullet \quad \dots \quad \bullet \xrightarrow{-b_{r-1}} \bullet$ e calcoliamo l'invariante β della singolarità ciclica associata.

Per definizione $\beta = r + F^2$ dove $F = \sum_{i=1}^r a_i C_i$ è unicamente determinato dalle relazioni

$$F \cdot C_i = b_i - 2 \quad i = 1, \dots, r$$

I coefficienti a_i sono dunque la soluzione del sistema lineare

$$(*) \quad \{a_{i-1} - a_i b_i + a_{i+1} = b_i - 2 \quad i = 1, \dots, r$$

con le condizioni al bordo $a_0 = a_{r+1} = 0$, e

$$F^2 = \sum_{i=1}^r a_i C_i \cdot F = \sum_{i=1}^r a_i (b_i - 2)$$

Sommando membro a membro le equazioni del sistema $(*)$ si trova

$$F^2 = \sum_{i=1}^r (2 - b_i) - a_1 - a_r$$

Scriviamo adesso a_1 e a_r in funzione dei numeri $0 < q, q' < n$ tali che $qq' \equiv 1 \pmod{n}$ e $\frac{n}{q} = [b_1, \dots, b_r]$, per fare ciò operiamo il cambiamento di variabili $a'_i = a_i + 1$.

Il sistema (*) diventa

$$(**) \quad \{a'_{i-1} - a'_i b_i - a'_{i+1} = 0 \quad i = 1, \dots, r$$

e le condizioni al bordo $a'_0 = a'_{r+1} = 1$.

Dalla teoria generale sono note due soluzioni particolari $\{\lambda_i\}, \{\mu_i\}$ del sistema (**) con le proprietà

$$\begin{array}{cccc} \lambda_0 = n & \lambda_1 = q & \lambda_r = 1 & \lambda_{r+1} = 0 \\ \mu_0 = 0 & \mu_1 = 1 & \mu_r = q' & \mu_{r+1} = n \end{array}$$

Se prendiamo una combinazione lineare delle soluzioni particolari del sistema omogeneo (**) otteniamo ancora una soluzione, imponendo le condizioni al bordo troviamo $a'_i = \frac{1}{n}(\lambda_i + \mu_i)$ e l'espressione dell'invariante β diventa

$$\beta = r + 2 + \sum_{i=1}^r (2 - b_i) - \frac{q + q' + 2}{n}$$

Proposizione 4.1. Una singolarità ciclica ha invariante β intero se e soltanto se è di tipo $\frac{1}{dm^2}(1, dma - 1)$ con a e m relativamente primi.

DIM. Si tratta di un conto semplicissimo, infatti se nelle notazioni precedenti $n = dm^2$ e $q = dma - 1$, allora $q' = dm(m - a) - 1$ e $q + q' + 2 \equiv 0 \pmod{n}$.

Viceversa supponiamo β intero, se poniamo $a' = q + 1$ ne segue $q' + 1 \equiv -a' \pmod{n}$ e

$$a'^2 \equiv -(q + 1)(q' + 1) \equiv -(q + q' + 2) \equiv 0 \pmod{n}$$

Siano $b = (a', n)$, $a = a'/b$, $m = n/b$, allora $ba^2 \equiv 0 \pmod{m}$ e poiché a e m non hanno fattori comuni sarà $b = dm$, cioè $n = dm^2$ e $q = dma - 1$.

□

Fissiamo adesso un intero $d > 0$ e consideriamo le singolarità cicliche di tipo $\frac{1}{dm^2}(1, dma - 1)$ al variare di $m > 0$ e di a relativamente primo con m .

Se $m = 1$ la singolarità è un punto doppio razionale di tipo A_{d-1} con relativo diagramma di Dynkin

$$\begin{array}{c} \bullet \text{---} \bullet \quad \cdots \quad \bullet \text{---} \bullet \\ -2 \quad -2 \quad \quad \quad -2 \quad -2 \end{array} \quad (d - 1 \text{ vertici})$$

Se $m > 1$ possiamo studiare il diagramma di Dynkin usando il metodo ricorsivo descritto nel seguente teorema che riprendiamo, con lievi modifiche, da ([K-S] Th. 3.11).

Teorema 4.2. Per ogni $d \geq 1$ indichiamo con T_d l'insieme dei diagrammi di Dynkin delle singolarità cicliche di tipo $\frac{1}{dm^2}(1, dma - 1)$ per $m \geq 2$ e $(a, m) = 1$, allora

i) $\bullet \in T_1$ e $\begin{array}{c} \bullet \text{---} \bullet \text{---} \bullet \\ -3 \quad -2 \quad -2 \end{array} \cdots \begin{array}{c} \bullet \text{---} \bullet \\ -2 \quad -3 \end{array} \quad (d \geq 2 \text{ vertici}) \in T_d$

ii) Se il diagramma $\begin{array}{c} \bullet \text{---} \bullet \\ -b_1 \quad -b_2 \end{array} \cdots \begin{array}{c} \bullet \text{---} \bullet \\ -b_{r-1} \quad -b_r \end{array}$ appartiene a T_d allora anche i diagrammi

$$\begin{array}{c} \bullet \text{---} \bullet \quad \cdots \quad \bullet \text{---} \bullet \\ -b_r \quad -b_{r-1} \quad \quad \quad -b_2 \quad -b_1 \\ \bullet \text{---} \bullet \quad \cdots \quad \bullet \text{---} \bullet \text{---} \bullet \\ -b_1 - 1 \quad -b_2 \quad \quad \quad -b_{r-1} \quad -b_r \quad -2 \end{array}$$

appartengono a T_d .

iii) Ogni elemento di T_d si ottiene partendo dall'elemento di T_d descritto in i) ed eseguendo un numero finito di volte le operazioni descritte in ii).

DIM. i) Se $m = 2$ deve essere $a = 1$ e i diagrammi delle singolarità di tipo $\frac{1}{4d}(1, 2d - 1)$ sono esattamente quelli sopra descritti.

ii) Abbiamo già osservato che

$$\frac{dm^2}{dma - 1} = [b_1, \dots, b_r] \iff [b_r, \dots, b_1] = \frac{dm^2}{dm(m - a) - 1}$$

e quindi T_d è chiuso per le riflessioni speculari.

Facendo un po' di conti si trova

$$\frac{dm^2}{dma - 1} = [b_1, \dots, b_r] \iff [b_1 + 1, \dots, b_r, 2] = \frac{d(m+a)^2}{d(m+a)a - 1}$$

che dimostra la chiusura di T_d rispetto alla seconda operazione.

iii) Prendiamo il diagramma di Dynkin D della singolarità ciclica di tipo $\frac{1}{dm^2}(1, dma - 1)$, $m \geq 2$, $(a, m) = 1$.

Se $m = 2$, D è fra quelli descritti in i) e non c'è nulla da dimostrare, se $m > 2$ procediamo per induzione su m .

A meno di scambiare a con $m - a$, operazione corrispondente alla riflessione speculare, possiamo supporre $a < m/2$ e ponendo $m' = m - a$ abbiamo

$$\frac{dm^2}{dma - 1} = \frac{d(m' + a)^2}{d(m' + a)a - 1} = [b_1 + 1, \dots, b_r, 2]$$

dove per quanto visto in ii)

$$[b_1, \dots, b_r] = \frac{dm'^2}{dm'a - 1}$$

che dimostra il passo induttivo. □

Corollario 4.2. l'invariante β di una singolarità ciclica di tipo $\frac{1}{dm^2}(1, dma - 1)$ $(a, m) = 1$ è uguale a $d - 1$.

DIM. Se $m = 1$ la singolarità è un P.D.R. di tipo A_{d-1} e la dimostrazione è immediata.

Se $m > 1$ e $\begin{array}{ccccccc} \bullet & \text{---} & \bullet & & \cdots & & \bullet & \text{---} & \bullet \\ & & -b_1 & & -b_2 & & & & -b_{r-1} & & -b_r \end{array}$ è il diagramma associato, l'espressione di β si semplifica nella forma

$$\beta = r + 1 + \sum_{i=1}^r (2 - b_i)$$

Si osserva banalmente che tale espressione è invariante per le operazioni descritte nel punto ii) del Teorema 4.2 e quindi basta calcolare il β sull'elemento generatore di T_d . □

Capitolo V : Degenerazioni normali proiettive di \mathbb{P}^2

§1 . Primi risultati sulle degenerazioni di \mathbb{P}^2

Consideriamo una degenerazione normale proiettiva $f: X \rightarrow \Delta$ con fibra generica isomorfa a \mathbb{P}^2 .

L'autointersezione del divisore canonico del piano proiettivo è strettamente positiva e quindi tutti i risultati di Badescu si applicano, in particolare vale

- i) $\rho(X_0) = b_2(X_0) = 1$
- ii) $p_n(X_0) = 0 \quad \forall n \geq 1$
- iii) $q(X_0) = 0$

Altre informazioni sono contenute nel seguente teorema

Teorema 1.1. Sia $f: X \rightarrow \Delta$ una degenerazione normale proiettiva di \mathbb{P}^2 , allora esiste un divisore primo di Weil D in X che è \mathbb{Q} -Cartier e tale che $D_t^2 = 1$ per ogni $t \in \Delta$

DIM. Poniamo $X^* = X - X_0$, allora $f: X^* \rightarrow \Delta^*$ è un fibrato a fibra \mathbb{P}^2 e per il Cor. I.3.4 esiste un divisore primo D^* in X^* tale che la restrizione di D^* a X_t , $t \in \Delta^*$ è una sezione del fascio $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(1)$.

Prendiamo D come la chiusura di D^* in X e dimostriamo che è \mathbb{Q} -Cartier.

Per ipotesi f è un morfismo proiettivo, esiste quindi un divisore di Cartier f -ampio L tale che la restrizione a X_t per $t \neq 0$ è una sezione del fascio $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(n)$ per qualche $n > 0$ indipendente da t .

Il fascio invertibile $\mathcal{O}_{X^*}(L - nD)$ ha restrizione banale sulle fibre e quindi è esso stesso banale, esisterà dunque un intero m tale che il divisore di Weil $L - nD$ è linearmente equivalente a mX_0 che è un divisore di Cartier.

□

Corollario 1.2. Nelle stesse notazioni del Teorema 1.1 $K_X = -3D$ e quindi X è \mathbb{Q} -Gorenstein.

DIM. Per ogni $t \neq 0$ $K_t + 3D_t$ è un divisore di grado 0 e ragionando esattamente come nella dimostrazione del Teorema 1.1 (con $L = K_X$ e $n = 3$) arriviamo alla conclusione.

□

Come abbiamo visto nei capitoli precedenti il fatto che X sia \mathbb{Q} -Gorenstein è fonte di notevoli informazioni sulla geometria di X_0 , ad esempio se le singolarità di X_0 sono razionali gli invarianti β sono interi e la loro somma è 0.

Osserviamo che per la formula di aggiunta $K_{X_0} = -3D_0$.

Proposizione 1.3. Sia Y superficie normale proiettiva con $q(Y) = 0$, $\varrho(Y) = 1$ e con al più singolarità cicliche di tipo $\frac{1}{4}(1, 1)$.

Se esiste un divisore effettivo D tale che $D^2 = 1$ e $K_Y = -3D$ allora o Y è nonsingolare, ed in tal caso isomorfo a \mathbb{P}^2 , oppure Y è isomorfo al cono proiettivo sulla curva razionale di grado 4 in \mathbb{P}^4 .

Osservazione 1.1. La Proposizione 1.3, applicata allo studio delle degenerazioni normali proiettive di \mathbb{P}^2 fornisce una classificazione completa della fibra singolare X_0 nei seguenti casi.

i) X_0 ha singolarità cicliche di tipo $\frac{1}{n}(1, 1)$.

Infatti l'invariante β di tali singolarità è intero solo se $n = 2, 4$ dove vale rispettivamente 1 e 0.

ii) X_0 ha, nelle notazioni di Catanese ($[C]$), come singolarità al più $\frac{1}{2}$ R.D.P. (quozienti di punti doppi razionali per automorfismi di ordine 2).

Infatti tutte le singolarità in questione hanno il $\beta \geq 0$ e l'unico caso in cui $\beta = 0$ è quello delle singolarità cicliche di tipo $\frac{1}{4}(1, 1)$ ([C] Th.s 2.2, 2.4, 2.5).

Osservazione 1.2. Nel caso in cui $Y \simeq X_0$ è la fibra singolare di una degenerazione di \mathbb{P}^2 daremo un'altra dimostrazione della Prop 1.3 che utilizza metodi puramente topologici.

DIM. Sia $Y' \xrightarrow{u} Y$ la risoluzione minimale, per ipotesi $H^0(-K_Y) \neq 0$ e $K_Y^2 \neq 0$, ragionando come nella dimostrazione della Prop IV. 2.2 si dimostra che $p_n(Y) = 0$ per ogni $n \geq 1$ e per il Teorema IV.2.4, Y' è una superficie razionale.

Siano y_1, \dots, y_s i punti singolari di Y e siano $E_1, \dots, E_s \subset Y'$ le corrispondenti curve eccezionali, che ricordiamo sono curve lisce razionali ad autointersezione -4 .

Y ha singolarità quoziente di ordine 4 e quindi ogni divisore di Weil in Y è $\frac{1}{4}$ -Cartier e se C_1, C_2 sono divisori di Weil allora $C_1 \cdot C_2 \in \frac{1}{4}\mathbb{Z}$.

Inoltre se C_1 e C_2 sono divisori di Weil effettivi e non equivalenti a 0 segue facilmente dall'ipotesi $\rho(Y) = 1$ che $C_1 \cdot C_2 > 0$.

Detto questo se scriviamo il divisore $D = \sum_{i=1}^n a_i C_i$, $a_i > 0$ come somma di divisori primi di Weil, dalla condizione

$$1 = D^2 = \sum_{i,j=1}^n a_i a_j C_i \cdot C_j$$

deduciamo che sono possibili al più tre casi

- i) $D = C$
- ii) $D = C_1 + C_2 \quad C_1 \neq C_2$
- iii) $D = 2C$

Indichiamo con D' il trasformato proprio del divisore D in Y' , poniamo inoltre $h_i = D' \cdot E_i \quad i = 1, \dots, s$.

Per ipotesi $K_Y = -3D$ e quindi possiamo scrivere

$$K_{Y'} = -3D' + \sum_{i=1}^s b_i E_i$$

dove i coefficienti b_i sono unicamente determinati dai coefficienti h_i e dalla condizione $K_{Y'} \cdot E_i = 2$.

Con un semplice conto si trova $b_i = -(3h_i + 2)/4$ e ponendo per comodità $n_i = h_i/2$ l'espressione di $K_{Y'}$ diventa

$$K_{Y'} = -3D' - \sum_{i=1}^s \frac{3n_i + 1}{2} E_i$$

in particolare n_i è un numero dispari per ogni i .

Sia $u^*(D)$ il pull-back di D come divisore \mathbb{Q} -Cartier, da $u^*(D) \cdot E_i = 0$ si ricava

$$\begin{aligned} u^*(D) &= D' + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^s n_i E_i \\ 1 = u^*(D)^2 &= D'^2 + \sum_{i=1}^s n_i^2 \quad \Rightarrow \quad D'^2 = 1 - \sum_{i=1}^s n_i^2 \end{aligned}$$

Adesso studiamo separatamente i tre casi che avevamo trovato.

i) $D = C$.

Avremo $D' = C'$ e quindi il genere aritmetico del divisore D' dovrà essere ≥ 0 .

Con un po' di calcoli

$$g(D') = 1 + \frac{1}{2} D' \cdot (D' + K_{Y'}) = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^s n_i(n_i + 1) \geq 0$$

e poiché n_i è dispari e positivo per ogni i non possiamo avere punti singolari.

ii) $D = C_1 + C_2 \quad C_1 \neq C_2$.

Dato che $C_1^2 = 1/4$ deve esistere almeno un punto singolare e per la formula $g(A + B) = g(A) + g(B) + A \cdot B - 1$ del genere aritmetico della somma di due divisori avremo che il genere di $D' = C'_1 + C'_2$ dovrà essere

$$g(D') = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^s n_i(n_i + 1) \geq -1$$

quindi esiste al più un punto singolare.

iii) $D = 2C$.

Anche in questo caso deve esserci almeno un punto singolare e il genere aritmetico del trasformato proprio C' di C dovrà essere ≥ 0

$$C'^2 = \frac{1}{4}D'^2 = \frac{1}{4}\left(1 - \sum_{i=1}^s n_i^2\right)$$

$$C' \cdot E_i = \frac{1}{2}D' \cdot E_i = \frac{h_i}{2} = n_i$$

e con qualche calcolo

$$g(C') = 1 + \frac{1}{2}C' \cdot (C' + K_{Y'}) = \frac{1}{8}\left(3 - \sum_{i=1}^s (2n_i + n_i^2)\right) \geq 0$$

come nel caso ii) esiste al più un punto singolare.

Nei casi ii) e iii) vale $g(Y') = 2$ e dunque Y' è una superficie di Segre-Hirzebruch che, contenendo una curva irriducibile ad autointersezione -4 , non può essere altro che \mathbb{F}_4 e quindi Y è il cono sulla curva razionale di grado 4 in \mathbb{P}^4 .

□

§2 . Un teorema di classificazione

Sia $Y \subset \mathbb{P}^2$ una curva liscia di grado n e consideriamo l'immersione di \mathbb{P}^2 in \mathbb{P}^N $N = \frac{1}{2}n(n+3)$ associata al sistema lineare completo $|Y|$.

Usando il metodo descritto nel §IV.1 possiamo costruire una degenerazione normale proiettiva di \mathbb{P}^2 in cui la fibra centrale X_0 è isomorfa al cono proiettivo sulla curva $Y \xrightarrow{i} \mathbb{P}^{N-1}$ immersa dal sistema lineare completo associato al fascio $\mathcal{O}_Y(Y)$.

Poniamoci il problema (indicato da Badescu) di vedere se ogni degenerazione normale proiettiva $f: X \rightarrow \Delta$ di \mathbb{P}^2 è isomorfa ad una di quelle appena descritte.

Il problema ha risposta affermativa nei seguenti casi:

- i) X_0 è Gorenstein. (Badescu [B] Th. 4.3)

- ii) X_0 possiede al più $\frac{1}{2}$ R.D.P. (Prop 1.3)
- iii) X_0 possiede al più singolarità isomorfe a vertici di coni su curve razionali proiettivamente normali. (Prop. 1.3)

Come si può notare abbiamo imposto delle condizioni molto limitative sulle singolarità della fibra centrale, d'altra parte dimostreremo nel prossimo paragrafo (contrariamente ai sospetti di Badescu) che il problema ha risposta negativa anche con l'ipotesi che le singolarità di X_0 siano quozienti.

Il resto del paragrafo è dedicato ad alcuni risultati che contribuiscono in positivo alla classificazione delle degenerazioni di \mathbb{P}^2 .

Indichiamo, come al solito, con $f: X \rightarrow \Delta$ una degenerazione normale proiettiva di \mathbb{P}^2 e con p_1, \dots, p_s i punti singolari di X_0 .

Per ogni $i = 1, \dots, s$ la funzione f definisce uno smoothing della singolarità normale (X_0, p_i) , sia $F_i \subset X_t$ $t \neq 0$ la fibra di Milnor associata.

Poniamo $F = \cup_{i=1}^s F_i$, allora l'inclusione $F \subset X_t$ definisce per ogni anello A una applicazione isometrica rispetto ai prodotti di intersezione

$$i_*: H_2(F; A) = \bigoplus^{\perp} H_2(F_i; A) \longrightarrow H_2(\mathbb{P}^2; A) = A$$

In particolare, se indichiamo con q la forma di intersezione su $H_2(F; A)$ e $A = k$ è un campo, il rango di q (=massima dimensione di un sottospazio dove q è non degenere) è ≤ 1 .

Inoltre se $k = \mathbb{R}$ e $\mu = \mu_- + \mu_0 + \mu_+ = \dim H_2(F; \mathbb{R})$, poiché la forma di intersezione su $H_2(\mathbb{P}^2; \mathbb{R})$ è definita positiva, avremo $\mu_- = 0$ $\mu_+ \leq 1$.

Proposizione 2.1. Sia $f: X \rightarrow \Delta$ degenerazione normale di \mathbb{P}^2 , $p \in X_0$ un punto singolare e μ il numero di Milnor dello smoothing $f: (X, p) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$.

Se (X_0, p) è una singolarità razionale allora $\mu = 0$ e p è un punto singolare di X .

DIM. Dalla formula di Steenbrink (Teor.III.2.1) abbiamo $\mu_0 + \mu_+ = 0$ e quindi $\mu = \mu_- = 0$.

Supponiamo per assurdo che p sia un punto regolare di X , allora (X_0, p) è una singolarità di ipersuperficie e $\mu > 0$ a meno che p sia un punto regolare per X_0 (Milnor [M] Th. 7.1).

□

Teorema 2.2. Sia $f: X \rightarrow \Delta$ una degenerazione normale proiettiva di \mathbb{P}^2 e sia $p \in X_0$ un punto singolare.

Se la singolarità (X_0, p) è quoziente allora è una singolarità ciclica di tipo $\frac{1}{n^2}(1, na-1)$ con $(n, a) = 1$ e n non divisibile per 3.

DIM. Abbiamo visto che X è \mathbb{Q} -Gorenstein, per la Prop. 1.2 e per il Teorema III.4.1 la singolarità (X_0, p) è ciclica di tipo $\frac{1}{n^2}(1, na-1)$ con $(n, a) = 1$.

Per il Cor. 1.2 il divisore canonico di (X, p) può essere scritto nella forma $3D$ con D divisore di Weil in (X, p) e la tesi segue immediatamente dal seguente lemma.

Lemma 2.3. Sia $(X, 0) \xrightarrow{\pi'} (\mathbb{C}, 0)$ uno smoothing \mathbb{Q} -Gorenstein di una singolarità ciclica di tipo $\frac{1}{dn^2}(1, dna-1)$, $(n, a) = 1$ e sia p un numero primo.

Allora vale la relazione $K_X = pD$ per qualche divisore di Weil D se e soltanto se p non divide n .

DIM. \Rightarrow Sia p un fattore irriducibile di n e supponiamo per assurdo che $K_X = pD$. Poniamo

$$q = \min\{r > 0 \mid rD \text{ è Cartier}\}$$

Nell'Esempio III.3.3 abbiamo visto che K_X è un divisore \mathbb{Q} -Cartier di indice n , quindi

$$\begin{aligned} pnD = nK_X \text{ è Cartier} &\Rightarrow q \mid np \\ qK_X = pqD \text{ è Cartier} &\Rightarrow n \mid q \Rightarrow p \mid q \\ \frac{q}{p}K_X = qD \text{ è Cartier} &\Rightarrow np \mid q \Rightarrow q = np \end{aligned}$$

Sia $Y \rightarrow X$ il rivestimento ciclico di grado q associato al divisore D , allora $\pi_1(Y_0 - 0)$ è un sottogruppo di $\pi_1(X_0 - 0) = \mathbb{Z}_{dn^2}$ di indice q e quindi deve essere uguale a $\mathbb{Z}_{\frac{dn}{p}}$.

Inoltre per il Cor. II.3.3 Y_0 è un P.D.R., combinando questo con il fatto che $\pi_1(Y_0 - 0) = \mathbb{Z}_{\frac{dn}{p}}$ segue che è un $A_{\frac{dn}{p}-1}$ e quindi il numero di Milnor dello smoothing $(Y, 0) \xrightarrow{\pi} (\mathbb{C}, 0)$ è $\mu = \frac{dn}{p} - 1$.

D'altra parte il numero di Milnor dello smoothing π' è $\mu' = d - 1$ e deve valere la relazione

$$\frac{dn}{p} = (\mu + 1) = q(\mu' + 1) = ndp$$

che è soddisfatta solo per $p = 1$.

\Leftarrow Usando le notazioni dell'Esempio III.3.3 abbiamo visto che $X = Y/\mu_n$ e che K_X è l'autofascio dell'immagine diretta di \mathcal{O}_Y corrispondente al carattere $a \in \mathbb{Z}_n$. Se p è invertibile in \mathbb{Z}_n è possibile trovare un divisore di Weil D in X tale che $K_X = pD$.

□

Osservazione 2.1. Il Lemma 2.3 fornisce una dimostrazione alternativa del Lemma 3.6 di [C].

Infatti per la formula [C] 3.3 gli smoothing di $\frac{1}{2}$ R.D.P. che non hanno risoluzione simultanea sono \mathbb{Q} -Gorenstein e il Lemma 2.3 dice appunto che il divisore canonico non può essere di tipo $2D$ con D divisore di Weil.

Finora non abbiamo trovato nessuna indicazione per quanto riguarda la quantità di punti singolari su X_0 , in proposito la migliore stima che siamo attualmente in grado di dare è contenuta nel seguente teorema

Teorema 2.4. Sia $f: X \rightarrow \Delta$ una degenerazione normale proiettiva di \mathbb{P}^2 , siano p_1, \dots, p_s i punti singolari di X_0 e supponiamo che per ogni i la singolarità (X_0, p_i) sia ciclica di tipo $\frac{1}{n_i^2}(1, n_i a_i - 1)$, $(a_i, n_i) = 1$. Allora gli interi n_i sono a due a due relativamente primi.

DIM. Manteniamo le notazioni precedenti indicando con F_i la fibra di Milnor dello smoothing $(X, p_i) \xrightarrow{f} (\Delta, 0)$.

Basta allora dimostrare che per ogni numero primo p e $k = \mathbb{Z}_p$ valgono le proprietà

- i) Se p non divide n_i allora $H_2(F_i; k) = 0$
- ii) Se p divide n_i allora $H_2(F_i; k) = k$ e la forma di intersezione è non degenere.

Per i risultati del Cap. III sappiamo che F_i ha il tipo di omotopia del quoziente di un bouquet di $n_i - 1$ sfere S^2 per un gruppo ciclico di ordine n_i , da questo segue

$$\begin{aligned} H_1(F_i; \mathbb{Z}) &= \pi_1(F_i) = \mathbb{Z}_{n_i} \\ H_j(F_i; \mathbb{Z}) &= 0 \quad j = 2, 3, 4 \\ H_1(\partial F_i; \mathbb{Z}) &= \mathbb{Z}_{n_i^2} \end{aligned}$$

Adesso non ci resta altro da fare che usare la formula dei coefficienti universali.

Caso i)

$$H_2(F_i; k) = \text{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(H_1(F_i; \mathbb{Z}), k) = 0$$

Caso ii)

$$\begin{aligned} H_1(F_i; k) &= H_1(F_i; \mathbb{Z}) \otimes k = k \\ H_2(F_i; k) &= \text{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(H_1(F_i; \mathbb{Z}), k) = k \\ H_1(\partial F_i; \mathbb{Z}) &= H_1(\partial F_i; \mathbb{Z}) \otimes k = k \end{aligned}$$

Bisogna dimostrare che la forma di intersezione è non degenere o equivalentemente che l'applicazione naturale $H^2(\overline{F}_i, \partial F_i; k) \rightarrow H^2(\overline{F}_i; k)$ è iniettiva.

Questo segue dalla successione esatta di coomologia della coppia $(\overline{F}_i, \partial F_i)$ a coefficienti nel campo k

$$\begin{array}{ccccccccc} H^1(\overline{F}_i, \partial F_i) & \rightarrow & H^1(\overline{F}_i) & \xrightarrow{\sim} & H^1(\partial F_i) & \rightarrow & H^2(\overline{F}_i, \partial F_i) & \xrightarrow{\sim} & H^2(\overline{F}_i) \\ \downarrow \wr & & \parallel & & \parallel & & \downarrow \wr & & \parallel \\ H_3(F_i) & & k & & k & & H_2(F_i) & & k \\ \parallel & & & & & & \parallel & & \\ 0 & & & & & & k & & \end{array}$$

dove gli isomorfismi verticali seguono dalla dualità di Lefschetz.

□

Corollario 2.5. Sia $f: X \rightarrow \Delta$ è una degenerazione normale proiettiva di \mathbb{P}^2 .

Se X_0 ha al più singolarità quozienti e se X è \mathbb{Q} -Gorenstein di indice n allora il numero di punti singolari di X_0 non supera il numero dei fattori irriducibili di n .

DIM. Evidente.

□

§3 . Un esempio di degenerazione normale proiettiva di \mathbb{P}^2

Indichiamo con σ_0 e σ_∞ le sezioni della superficie di Segre-Hirzebruch \mathbb{F}_7 ad autointersezione rispettivamente 7 e -7 , con f la fibra generica e con E_0 una fibra fissata.

Costruiamo una superficie normale Y secondo il seguente diagramma

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{F}_7 & \xleftarrow{\mu} & S \\ & & \downarrow \pi \\ & & Y \end{array}$$

Dove μ è la composizione di tre scoppiamenti μ_1, μ_2, μ_3 così descritti.

- 1) $\mu_1: S_1 \rightarrow \mathbb{F}_7$ è lo scoppiamento di un punto di $E_0 - \sigma_\infty$; denotiamo con $E_0 \subset S_1$ il trasformato proprio di E_0 e con $E_1 \subset S_1$ la curva eccezionale di μ_1 .
- 2) $\mu_2: S_2 \rightarrow S_1$ è lo scoppiamento del punto $E_0 \cap E_1$; denotiamo con $E_0, E_1 \subset S_2$ i trasformati propri di E_0, E_1 e con $E_2 \subset S_2$ la curva eccezionale di μ_2 .
- 3) $\mu_3: S \rightarrow S_2$ è lo scoppiamento di un punto di $E_2 - (E_1 \cup E_0)$; denotiamo con $E_0, E_1, E_2 \subset S$ i trasformati propri di E_0, E_1, E_2 .

Poniamo $C = \sigma_\infty \cup E_0 \cup E_1 \cup E_2 \subset S$. C è una configurazione di curve razionali con grafo duale



Osserviamo che C è una stringa di Hirzebruch-Jung, esiste quindi un morfismo birazionale $\pi: S \rightarrow Y$ che contrae la curva C nel punto $p \in Y$ e la singolarità (Y, p) è ciclica. Il tipo si calcola con la corrispondente frazione parziale ed è $\frac{1}{25}(1, 4)$.

Dalla seguente segue che la superficie Y è proiettiva

Proposizione 3.1.(M. Artin) Sia V una superficie liscia proiettiva, $C = \cup C_i$ una curva connessa e contraibile su Y .

Se $\pi: V \rightarrow \tilde{V}$ è la contrazione di C e $(\tilde{V}, \pi(C))$ è una singolarità razionale allora la superficie normale \tilde{V} è proiettiva.

DIM. ([A2] Prop. 1 e [A1] Th. 2.3).

□

Osservazione 3.1. L'ipotesi che la singolarità $(\tilde{V}, \pi(C))$ sia razionale è essenziale affinché \tilde{V} sia proiettiva (cf. Hartshorne [H] Example V.5.7.3).

Lemma 3.2. $H^1(\mathcal{O}_Y) = H^2(\mathcal{O}_Y) = 0$

DIM. La singolarità (Y, p) è razionale e la tesi segue immediatamente dalla successione spettrale di Leray.

□

Il divisore canonico di \mathbb{F}_7 è

$$K_{\mathbb{F}_7} = -2\sigma_\infty - 9f$$

Applicando la formula di aggiunzione per lo scoppimento si trova il canonico di S

$$K_S = -2\sigma_\infty - 9E_0 - 8E_1 - 16E_2 - 15E_3$$

Se indichiamo con π^*K_Y il pull back di K_Y come divisore \mathbb{Q} -Cartier abbiamo $K_S = \pi^*K_Y + F$ dove F è un divisore \mathbb{Q} -Cartier con il supporto contenuto in C .

Risolvendo il sistema di equazioni lineari associate possiamo calcolare π^*K_Y .

$$\pi^*K_Y = -\frac{6}{5}\sigma_\infty - \frac{42}{5}E_0 - \frac{39}{5}E_1 - \frac{78}{5}E_2 - 15E_3$$

Lemma 3.3.

- i) $H^0(nK_Y) = 0 \quad \forall n > 0$
- ii) $\dim H^0(-K_Y) \geq 9$
- iii) $K_Y^2 = 9$

iv) $Div(Y) \cong \mathbb{Z}$ e quindi $\rho(S) = 1$

v) $-K_Y$ è ampio

vi) $H^0(\theta_Y^\vee) = 0$

vii) $H^2(\theta_Y) = 0$

DIM.

i) Indichiamo con $[\pi^*(nK_Y)]$ il più grande divisore di Cartier $\leq \pi^*(nK_Y)$, per la formula di proiezione (Sakai [Sa] Th. 1.2) abbiamo

$$\mathcal{O}_Y(nK_Y) = \pi_* \mathcal{O}_S([\pi^*(nK_Y)]) \quad \forall n \in \mathbb{Z}$$

Se $n > 0$ le componenti irriducibili del divisore $[\pi^*(nK_Y)]$ hanno tutte molteplicità negativa e quindi

$$H^0(nK_Y) = H^0([\pi^*(nK_Y)]) = 0$$

ii) Sempre per la formula di proiezione abbiamo

$$H^0(-K_Y) = H^0([\pi^*(-K_Y)])$$

e

$$\begin{aligned} [\pi^*(-K_Y)] &= \sigma_\infty + 8E_0 + 7E_1 + 15E_2 + 15E_3 \\ &= \mu^*(\sigma_\infty + 7f) + E_0 + E_2 + E_3 \\ &= \mu^*(\sigma_0) + E_0 + E_2 + E_3 \end{aligned}$$

Quindi $\dim H^0(-K_Y) \geq \dim H^0(\mathbb{F}_7, \sigma_0)$.

è un fatto noto (Beauville [Be] Ex. 1 pag 52), e comunque facile da dimostrare che $\dim H^0(\mathbb{F}_n, \sigma_0) = n+2$ e quindi il termine a destra della disequaglianza precedente è esattamente 9.

iii) Per definizione è $K_Y^2 = (\pi^* K_Y)^2$, si può quindi fare il conto oppure ricordarsi che l'invariante β associato alla singolarità (Y, p) è 0 e

$$K_Y^2 = K_S^2 - F^2 = K_S^2 - \beta + b_2(C) = 5 + 4 = 9$$

iv) Basta osservare che

$$\text{Div}(Y) = \text{Div}(Y - \{p\}) = \text{Div}(S - C) = \mathbb{Z}E_3$$

v) Segue dal fatto che Y è proiettiva e dai punti i) e iv).

vi) Utilizziamo il seguente risultato

Proposizione 3.4. Sia (Y, p) una singolarità quoziente, $Y' \xrightarrow{\pi} Y$ la risoluzione minimale e $i: U = Y - \{p\} \rightarrow Y$, allora $\pi_*\Omega_{Y'}^1 = i_*\Omega_U^1$

DIM. Pinkham ([Pi] Prop. 16.2).

□

Torniamo alla dimostrazione del punto vi), sia $i: U = Y - \{p\} \rightarrow Y$ l'aperto dei punti regolari, allora $\theta_Y^\vee = i_*\Omega_U^1$ e quindi

$$H^0(Y, \theta_Y^\vee) = H^0(Y, i_*\Omega_U^1) = H^0(S, \Omega_S^1) = 0$$

dove l'ultima uguaglianza segue dalla razionalità della superficie liscia S .

vii) Y è proiettiva, per la dualità di Serre esiste un isomorfismo

$$\text{Hom}(\theta_Y, \omega_Y) = H^2(\theta_Y)^\vee$$

Y è normale e θ_Y è saturo dunque abbiamo

$$\text{Hom}(\theta_Y, \omega_Y) = \text{Hom}(\theta_U, \omega_U)$$

U è una varietà liscia quindi i fasci tangente e canonico sono localmente liberi ed esiste una bigezione fra $\text{Hom}(\theta_U, \omega_U)$ e $\text{Hom}(\omega_U^\vee, \theta_U^\vee)$ definita da $s \rightarrow s^\vee$.

Dire che $H^2(\theta_Y) = 0$ è dunque equivalente a dire che

$$\text{Hom}(\mathcal{O}(-K_U), \Omega_U^1) = \text{Hom}(\omega_U^\vee, \theta_U^\vee) = 0$$

Supponiamo per assurdo che esista un morfismo non nullo

$$\mathcal{O}(-K_U) \longrightarrow \Omega_U^1$$

Il fascio $\mathcal{O}(-K_U)$ è invertibile e quindi il morfismo è iniettivo, in particolare $\dim H^0(\Omega_U^1) > 0$ in contraddizione con il punto vi).

□

Per costruire deformazioni di Y useremo il seguente risultato di globalizzabilità dimostrato da Wahl ([W] prop. 6.4)

Proposizione 3.5. Sia Y uno spazio analitico compatto con una singolarità isolata in p , se $H^2(\theta_Y) = 0$ allora ogni deformazione $(\mathcal{Y}, p) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ di (Y, p) si può ottenere da una deformazione $\mathcal{Y} \rightarrow \Delta$ di Y .

Abbiamo visto che la singolarità (Y, p) ammette uno smoothing \mathbb{Q} -Gorenstein, per il teorema di globalizzabilità esiste una defomazione che estende tale smoothing

$$f: X \rightarrow \Delta \quad X_0 \cong Y$$

Dove $\Delta \subset \mathbb{C}$ è un disco di centro 0 e raggio sufficientemente piccolo.

Teorema 3.6. f è una degenerazione normale proiettiva di \mathbb{P}^2

DIM. Dimostriamo prima che f è un morfismo proiettivo.

Per costruzione X è \mathbb{Q} -Gorenstein e $-K_{X_0}$ è ampio, esiste quindi $n > 0$ tale che $-nK_{X_0}$ è molto ampio e $-nK_X$ è Cartier .

Abbiamo una successione esatta di fasci su X

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_X(-nK_X - X_0) \longrightarrow \mathcal{O}_X(-nK_X) \xrightarrow{r_0} \mathcal{O}_{X_0}(-nK_{X_0}) \longrightarrow 0$$

Vogliamo dimostrare che $H^1(-nK_X - X_0) = 0$, per i teoremi di semicontinuità e del cambiamento di base basta vedere che $H^1(-nK_Y) = 0$.

Sia $D \in |-nK_Y|$ liscio che non interseca il punto singolare p , abbiamo due successioni esatte

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_Y \longrightarrow \mathcal{O}_Y(-nK_Y) \longrightarrow \mathcal{O}_D(-nK_Y) \longrightarrow 0$$

$$0 = H^1(\mathcal{O}_Y) \longrightarrow H^1(-nK_Y) \longrightarrow H^1(\mathcal{O}_D(-nK_Y))$$

Per la dualità di Serre in D vale $H^1(\mathcal{O}_D(-nK_Y)) = H^0(\mathcal{O}_D(K_Y))$ e poiché il grado di K_Y su D è negativo il secondo termine è zero.

Riepilogando abbiamo dimostrato che la restrizione a X_0 induce una applicazione surgettiva

$$H^0(-nK_X) \xrightarrow{r_0} H^0(-nK_{X_0})$$

Poniamo $N = \dim H^0(-nK_{X_0})$ e sia $V \subset H^0(-nK_X)$ un sottospazio di dimensione N tale che r_0 ristretta a V sia ancora surgettiva.

Restringendo eventualmente Δ posso supporre che il sistema lineare $|V|$ non ha punti base e posso definire un morfismo ϕ

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\phi} & \Delta \times \mathbb{P}^{N-1} \\ \downarrow f & & \downarrow \pi \\ \Delta & \xrightarrow{id} & \Delta \end{array}$$

$$\phi(x) = (f(x), v_1(x), \dots, v_N(x))$$

dove v_1, \dots, v_N è una base di V .

$\phi|_{X_0}$ è una immersione, e poiché $\forall x \in X_0$ è $T_{X,x} = T_{X_0,x} \oplus T_{\Delta,f(x)}$, ϕ è una immersione locale in ogni punto della fibra centrale.

Usando i ragionamenti topologici standard si dimostra, restringendo eventualmente Δ , che ϕ è una immersione e quindi che f è proiettiva.

La fibra X_t , $t \neq 0$ è una superficie proiettiva liscia con

$$H^1(\mathcal{O}_{X_t}) = H^0(nK_{X_t}) = 0 \quad \forall n > 0$$

Per il teorema di Castelnuovo X_t è razionale e poiché $K_{X_t}^2 = 9$ deve essere il piano proiettivo.

□

§4 . Un esempio di degenerazione normale proiettiva di $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$

Per finire utilizziamo le tecniche viste nel §3 per costruire un esempio di degenerazione di $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$.

Con tale esempio daremo una risposta negativa al problema analogo a quello descritto nel §2 relativo alle degenerazioni di $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ (Badescu [B] Problem 4.8.3).

Rispetto al caso del piano proiettivo, il caso di $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ è più complicato da studiare per il fatto che per una superficie liscia proiettiva S le condizioni $q(S) = 0$, $Kod(S) = -\infty$ e $K_S^2 = 8$ non sono sufficienti a determinare S .

Prima di costruire l'esempio abbiamo dunque bisogno di alcuni risultati preliminari.

Lemma 4.1.

$$\begin{aligned} h^0(\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1, \theta_{\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1}) &= 6 \\ h^0(\mathbb{F}_n, \theta_{\mathbb{F}_n}) &= n + 5 \quad \forall n \geq 1 \end{aligned}$$

DIM. Kodaira ([Ko] pag. 73).

□

Sia S una superficie razionale, indichiamo con G il gruppo degli automorfismi olomorfi di S .

G agisce sul gruppo di Picard e il sottogruppo degli invarianti $Pic(S)^G$ è diverso da zero perché contiene il divisore canonico.

Proposizione 4.2. Sia $Y \subset \mathbb{C}$ un aperto connesso, $f: X \rightarrow Y$ olomorfa propria di rango massimo con le fibre isomorfe alla superficie S .

Se $D \in Pic(S)^G$ allora esiste $\mathcal{L} \in Pic(X)$ tale che

$$(*) \quad \mathcal{L}_t \simeq D \quad \forall t \in Y$$

DIM. Osserviamo innanzitutto che, poiché D è G -invariante la relazione (*) è indipendente dal particolare isomorfismo di S con X_t .

Scriviamo $Y = \cup_{i=1}^{\infty} \Delta_i$ come unione numerabile di dischi e sia $X_i = f^{-1}(\Delta_i)$, $X_{(n)} = f^{-1}(\Delta_1 \cup \dots \cup \Delta_n)$.

Per il Corollario IV.2.2, per ogni $i \geq 1$ esiste $\mathcal{L}_i \in Pic(X_i)$ che ha restrizione alle fibre isomorfa a D e usando la proprietà di incollamento dei fasci posso definire per ricorrenza una successione $\mathcal{L}_{(n)} \in Pic(X_{(n)})$ tale che $\mathcal{L}_{(n)}|_{X_i} \cong \mathcal{L}_i \quad \forall i \leq n$.

Fissando per ogni n un isomorfismo $\varphi_n: \mathcal{L}_{(n)} \rightarrow \mathcal{L}_{(n+1)}|_{X_{(n)}}$ sempre per la proprietà di incollamento possiamo trovare il fascio desiderato \mathcal{L} .

□

Corollario 4.3. Nelle stesse ipotesi della Prop. 4.2 se $H^0(S, D) \neq 0$ allora $H^0(X, \mathcal{L}) \neq 0$.

DIM. Per il teorema del cambiamento di base $f_*\mathcal{L}$ è localmente libero di rango positivo e la tesi segue dal teorema di Cartan A.

□

Consideriamo la superficie normale Y secondo il seguente diagramma

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{F}_6 & \xleftarrow{\mu} & S \\ & & \downarrow \pi \\ & & Y \end{array}$$

dove μ è la composizione di quattro scoppiamenti $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4$ così descritti.

- 1) $\mu_1: S_1 \rightarrow \mathbb{F}_6$ è lo scoppiamento di un punto di $E_0 - \text{sigma}_{\infty}$; denotiamo con $E_0 \subset S_1$ il trasformato proprio di E_0 e con $E_1 \subset S_1$ la curva eccezionale di μ_1 .
- 2) $\mu_2: S_2 \rightarrow S_1$ è lo scoppiamento del punto $E_0 \cap E_1$; denotiamo con $E_0, E_1 \subset S_2$ i trasformati propri di E_0, E_1 e con $E_2 \subset S_2$ la curva eccezionale di μ_2 .
- 3) $\mu_3: S_3 \rightarrow S_2$ è lo scoppiamento del punto $E_0 \cap E_2$; denotiamo con $E_0, E_1, E_2 \subset S_3$ i trasformati propri di E_0, E_1, E_2 e con $E_3 \subset S_3$ la curva eccezionale di μ_3 .

- 4) $\mu_4: S \rightarrow S_3$ è lo scoppiamento di un punto di $E_3 - (E_2 \cup E_0)$; denotiamo con $E_0, E_1, E_2, E_3 \subset S$ i trasformati propri di E_0, E_1, E_2, E_3 .

Definiamo π come la contrazione della curva eccezionale

$$C = \sigma_\infty \cup E_0 \cup E_1 \cup E_2 \cup E_3$$

Con ragionamento identico a quello del §3 si dimostra il seguente

Lemma 4.4.

- i) $H^1(\mathcal{O}_Y) = H^0(nK_Y) = 0 \quad \forall n > 0$
- ii) $-K_Y$ è ampio
- iii) $\rho(Y) = 1$
- iv) $H^2(\theta_Y) = 0$

Poniamo $p = \pi(C)$, il diagramma duale di intersezione della curva C è

$$\begin{array}{ccccccccc} \bullet & & \bullet & & \bullet & & \bullet & & \bullet \\ -6 & & -3 & & -2 & & -2 & & -2 \end{array}$$

La frazione parziale associata è

$$6 - \frac{1}{3 - \frac{1}{2 - \frac{1}{2 - \frac{1}{2}}}} = \frac{50}{9}$$

(Y, p) è quindi una singolarità ciclica di tipo

$$\frac{1}{50}(1, 9) = \frac{1}{2 \cdot 5^2}(1, 2 \cdot 5 - 1)$$

Uno smoothing della singolarità (Y, p) è $f: V \rightarrow \mathbb{C}$ dove

$$V = \{F = 0\}/\mu_5 \quad F = uv + y^{10} - t$$

il gruppo ciclico μ_5 agisce in modo diagonale lasciando invariata la coordinata t

$$\mu_5 \ni \xi: (u, v, y, t) \rightarrow (\xi u, \xi^{-1}v, \xi y, t)$$

e f è l'applicazione indotta dalla proiezione sulla coordinata invariante.

Osserviamo che l'ipersuperficie $\{F = 0\}$ ha in 0 un punto regolare con coordinate locali u, v, y e quindi V è una singolarità ciclica di tipo $\frac{1}{5}(1, -1, 1)$.

Usiamo la Proposizione 3.5 e estendiamo $f: (V, p) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ ad una deformazione di Y $f: X \rightarrow \Delta$ dove $\Delta \subset \mathbb{C}$ è un disco di raggio sufficientemente piccolo.

Con dimostrazione essenzialmente identica a quella del Teorema 3.6 si dimostra che f è proiettiva e che la superficie X_t $t \neq 0$ è razionale.

Abbiamo $K_{X_t}^2 = K_Y^2 = 8$ e quindi X_t è una superficie \mathbb{F}_n , $n \geq 0$.

Dimostriamo che, a meno di restringere Δ , l'intero n è indipendente da $t \in \Delta^*$.

Sia $\theta_{X|\Delta} = (\Omega_{X|\Delta}^1)^\vee$ il fascio delle derivazioni relative, si tratta di un fascio riflessivo che per $t \neq 0$ induce su X_t il fascio delle derivazioni.

Dal teorema di semicontinuità, per ogni m l'insieme

$$\{t \in \Delta \mid h^0(X_t, (\theta_{X|\Delta})_t) \geq m\}$$

è un chiuso analitico, quindi restringendo eventualmente Δ possiamo supporre che la funzione $t \rightarrow h^0(X_t, (\theta_{X|\Delta})_t)$ è costante in Δ^* .

Usando il Lemma 4.1 e il fatto che \mathbb{F}_0 e \mathbb{F}_1 non sono omeomorfi segue che n è indipendente da t .

Supponiamo per assurdo che $n > 0$, allora la sezione σ_∞ è invariante per automorfismi olomorfi di \mathbb{F}_n e per la Prop 4.2 e Cor. 4.3 possiamo trovare un divisore di Weil effettivo D su X tale che $D_t \simeq \sigma_\infty \forall t \neq 0$.

X ha una singolarità quoziente in p , in particolare D è un divisore di Weil \mathbb{Q} -Cartier e $D_0^2 = D_t^2 = -n$, che è un assurdo perché la forma di intersezione su Y è definita positiva.

□

BIBLIOGRAFIA

- [A1] M.Artin: *Some numerical criteria for contractability of curves on algebraic surfaces* Amer. J. Math. 84 (1962) pag 485-496.
- [A2] M.Artin: *On isolated rational singularities of surfaces.* Amer. J. Math. 88 (1966) pag. 129-136.
- [B] L.Badescu: *Normal projective degeneration of rational and ruled surface.* Crelle Jour. 367 (1986) pag. 76-89.
- [B-P-V] W.Barth,C.Peters,A.van de Ven: *Compact complex surfaces.* Springer Verlag Ergebnisse 4 (1984).
- [Be] A.Beuville: *Complex algebraic surfaces.* London Math. Soc. LNS 68 (1983).
- [C] F.Catanese: *Automorphism of rational double points and moduli spaces of surfaces of general type.* Compositio Math. 61 (1987) pag 81-102 .
- [E-V] H.Esnault,E.Viehweg: *Two dimensional quotient singularities deform to quotient singularities.* Math. Annalen 271 (1985) pag 439-449.
- [F] G.Fischer: *Complex Analytic Geometry.* L.N.M. Springer-Verlag (1976).
- [Fr] P.Francia: *Some remarks on minimal models I.* Compositio Math. 40 (1980) pag. 301-313.
- [G] R.Godement: *Topologie algébrique et théorie des faisceaux.* Hermann Paris (1958).
- [G-S] G.M.Greuel,J.Steenbrink: *On the topology of smoothable singularities.* Proc. Symp. Pure Math. 40 part 1 (1983) A.M.S. pag 535-545.
- [G-H] P.Griffiths,J.Harris: *Principles of algebraic geometry.* Wiley Interscience publication (1978).
- [H] R.Hartshorne: *Algebraic geometry.* Springer Verlag (1977).
- [H-K] F.Hirzebruch,K.Kodaira: *On the complex projective spaces.* J. Math. Pures Appl. 36 (1957) pag. 201-216.

- [K-K-M-S] G.Kempf,F.Knudsen,D.Mumford,B.Saint-Donat: *Toroidal embeddings*. Lecture Notes in Math. 339 Springer Verlag (1973).
- [K-S] J.Kollàr,N.I.Shepherd-Barron: *Threefold and deformation of surface singularities*. Inv. Math. 91 (1988) pag 299-338.
- [Ko] K.Kodaira: *Complex manifold and deformation of complex structures*. Springer Verlag (1986).
- [L] F.Lazzeri: *Analytic singularities*. Corso C.I.M.E. (1974).
- [Lo] E.J.N.Looijenga: *Isolated singular points on complete intersection*. London Math. Soc. L.N.S. 77 (1983).
- [L-W] E.J.N.Looijenga,J.Wahl: *Quadratic function and smoothing surface singularities*. Topology 25 (1986) pag 261-291.
- [M] J.Milnor: *Singular points of complex hypersurfaces*. Ann. Math. Studies 61, Princeton Univ. Press (1968).
- [Mu] D.Mumford: *The topology of normal singularities of an algebraic surface and a criterion for simplicity*. Publ. Math. IHES 9 (1961) pag 5-22 .
- [P] U.Persson: *On degeneration of algebraic surfaces*. Memoirs A.M.S. 189 (1977).
- [Pi] H.Pinkham: *Singularities rationnelles de surfaces*. Lecture Notes in Math. 777 Springer Verlag (1980) pag 147-168.
- [R] M.Reid: *Young person's guide to canonical singularities*. Proc. Symp. in Pure Math. 46 part 1 (1987) A.M.S. pag 345-414.
- [Sa] F.Sakai: *Classification of Normal Surfaces*. Proc. Symp. in Pure Math. 46 part 1 (1987) A.M.S. pag 451-465.
- [Se] C.Segre: *Recherches générales sur les courbes et les surfaces réglés algébriques* Math. Ann. 30 (1887) e 34 (1889).
- [St] J.Steenbrink: *Mixed Hodge structures associated with isolated singularities*. Proc. Symp. Pure Math. 40 part 2 (1983) A.M.S. pag 513-536.

[T] G.N.Tyurina: *Resolution of singularities of plane deformations of double rational points*. Funk. Anal. i. Priloz. 4 (1970) pag 77-83.

[W] J.Wahl: *Smoothing of normal surface singularities*. Topology 20 (1981) pag 219-246.

[Y] S.T.Yau: *Calabi conjecture and some new result in algebraic geometry*. Proc. Natl. Acad. Sci. USA 74 (1977) pag. 1789-1799.