Stutture di Spin ed equazione di Monopolo

5 aprile 1995

1. Algebre di Clifford e gruppi di Spin.

Dato uno spazio vettoriale V reale di dimensione finita $k \geq 2$ con prodotto scalare $(\ ,\ )$ e sfera unitaria $S_V = \{v \in V \mid \|v\|^2 = (v,v) = 1\}$ si definisce l'algebra di Clifford associata $C(V)$ come il quoziente dell'algebra associativa libera $\overset{\infty}{\underset{n=0}{\oplus}} V^{\otimes n}$ per l'ideale bilatero generato dagli elementi $v^2 + \|v\|^2$, $v \in V$.

L'applicazione lineare $T\colon \oplus\ V^{\otimes n} \to \oplus\ V^{\otimes n}$ definita sui tensori semplici da $T(x_1 \otimes ... \otimes x_l) = x_l \otimes ... \otimes x_1$ è un antiisomorfismo di algebre e preserva gli elementi $v \otimes v + \|v\|^2$, si fattorizza dunque ad un antiisomorfismo $T\colon C(V) \to C(V)$.

Si noti che ogni punto $v \in S_V$ è invertibile in $C(V)$ con inverso $-v$ e che ogni isometria $V \to W$ si estende ad un omomorfismo iniettivo di algebre di clifford $C(V) \to C(W)$.

Denotiamo con C_k l'algebra di Clifford associata ad $\mathbb{R}^k$ dotato del prodotto scalare ordinario.

Esiste una decomposizione $C(V) = C^0 \oplus C^1$ dove C^0 (risp. C^1) è il sottospazio vettoriale generato dai prodotti di un numero pari (risp. dispari) di elementi di V. Sia $\alpha\colon C(V) \to C(V)$ l'omomorfismo di algebre tale che $\alpha(x) = (-1)^i x$ per ogni $x \in C^i$, $i = 0, 1$. Si osservi che $\alpha(v) = v^{-1}$ per ogni $v \in S_V$.

Lemma 1. *Sia $x \in C(V)$ tale che $\alpha(x)v = vx$ per ogni $v \in V$, allora $x \in \mathbb{R}$.*

Proof. Sia $e_1, ..., e_k$ una base ortonormale di V, in $C(V)$ valgono le relazioni $e_i^2 = -1$, $e_i e_j = -e_j e_i$ per $i \neq j$ ed è facile vedere che una base di $C(V)$ come spazio vettoriale è data dai monomi $e_{i_1}...e_{i_s}$ con $i_1 < i_2 < ... < i_s$ e quindi la dimensione di $C(V)$ è 2^k.

Sia x come nell'enunciato e scriviamo $x = x_0 + x_1$ con $x_i \in C^i$. La relazione $\alpha(x)v = vx$ è equivalente a

$$x_0 v = v x_0 \qquad x_1 v = -v x_1 \qquad \forall v \in V$$

Supponiamo per assurdo $x_1 \neq 0$, esiste allora un elemento della base e_i tale che $x_1 = a + e_i b = a + b e_i$ con $b \neq 0$, a, b polinomi negli e_j $j \neq i$. Ma $e_i x_1 = e_i a - b = -x_1 e_i = -a e_i + b$ assurdo: allo stesso modo si dimostra che x_0 deve essere una costante. □

Definition 2. Si definisce $Pin(V)$ come il sottogruppo del gruppo moltiplicativo degli elementi invertibili di $C(V)$ generato dai vettori di S_V. $Spin(V) = Pin(V) \cap C^0$ è il gruppo formato dai prodotti di un numero pari di elementi di S_V.

Lemma 3. *$Spin(V)$ è connesso per archi.*

Proof. Sia $x = x_1 ... x_{2l} \in Spin(V)$, siccome S_V è connesso per archi per ogni i esiste un cammino congiungente x_i con x_1 e il prodotto di tali cammini congiunge x con $x_1^{2l} = 1$. □

Se $x \in S_V$ e $v \in V$ usando la relazione $xv + vx + 2(x, v) = 0$ si prova che $\alpha(x)vx^{-1} = xvx = v - 2(x, v)x$ che è la simmetria rispetto all'ortogonale di x. Siccome le simmetrie generano il gruppo ortogonale si hanno le seguenti successioni esatte di gruppi

$$0 \longrightarrow \pm 1 \longrightarrow Pin(V) \xrightarrow{\pi} O(V) \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow \pm 1 \longrightarrow Spin(V) \xrightarrow{\pi} SO(V) \longrightarrow 0$$

Dove $\pi(x)(v) = \alpha(x)vx^{-1}$. Il fatto che $\ker \pi = \pm 1$ segue dal lemma 1 e dal fatto che $\alpha(x)T(x) = 1$ per ogni $x \in Pin(V)$.

Corollary 4. *Se $k \geq 3$ $Spin(V)$ è il rivestimento universale di $SO(V)$.*

Proof. Infatti è un rivestimento connesso a due fogli di $SO(V)$ che ha gruppo fondamentale $\mathbb{Z}/2$. □

Si pone $Spin(k) = Spin(\mathbb{R}^k)$.

Example . $Spin(3) = SU(2)$. Per l'unicita' del rivestimento universale è sufficiente trovare un rivestimento a due fogli $SU(2) \to SO(3)$. Sia H lo spazio vettoriale reale delle matrici 2×2 complesse hermitiane a traccia nulla, $SU(2)$ agisce per coniugio su H e siccome per ogni $A \in H$ la norma di A è la radice quadrata della traccia di A^2 tale norma è chiaramente invariante per coniugio.

È dunque definito un omomorfismo di gruppi $SU(2) \to SO(3)$ ed un semplice conto mostra che il nucleo è formato da $\pm I$. La surgettività segue dal fatto che i due gruppi hanno la stessa dimensione.

Example . $Spin(4) = Spin(3) \times Spin(3)$. Tale uguaglianza puo' essere vista nel modo seguente, sia V spazio vettoriale reale di dimensione 4 con prodotto scalare, il nucleo dell'omomorfismo naturale $GL(V) \to GL(\wedge^2 V)$ è formato esattamente da $\pm I$. Infatti se f appartiene al nucleo, f agisce trivialmente sulla grassmaniana dei 2-piani in V e quindi è un multiplo dell'identità.

Le restrizione del precedente omomorfismo a $SO(V)$ induce una successione esatta

$$0 \longrightarrow \pm I \longrightarrow SO(V) \longrightarrow SO(\wedge_+ V) \times SO(\wedge_- V) \longrightarrow 0$$

dove $\wedge_\pm V$ sono gli autospazi di $\wedge^2 V$ relativi all'operatore $*$. Si osservi che $\dim SO(4) = 6, \dim SO(3) = 3$. Dunque $Spin(4)$ è il rivestimento universale di $SO(3) \times SO(3)$.

Identifichiamo tramite π l'algebra di lie di $Spin(V)$ con $so(V)$. Rispetto ad una base ortonormale fissata $e_1, ..., e_k$ $so(V)$ si identifica con lo spazio delle matrici antisimmetriche $k \times k$.

$v(t) = cos(t) + sen(t)e_1e_2$ è un cammino differenziabile in $Spin(V)$ infatti si ha

$$(cos(s)e_1 + sen(s)e_2)(-cos(s)e_1 + sen(s)e_2) = cos(2s) + sen(2s)e_1e_2$$

ed il cammino è chiaramente differenziabile. Si noti inoltre che $v(t)^{-1} = cos(t) + sen(t)e_2e_1$.

Applicando π e derivando nello 0 si ha $\pi_*(v'(0))e_j = e_1e_2e_j + e_je_2e_1 = 2Ae_j$ dove

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & . & 0 \\ 1 & 0 & . & 0 \\ . & . & . & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Quindi le velocità nello 0 dei cammini $cos(t) + sen(t)e_ie_j$ per tutte le coppie $i < j$ sono una base dell'algebra di lie di $Spin(4)$.

I conti precedenti mostrano quindi che l'applicazione $\bigwedge^2 V \to LieSpin(V)$, $e_1 \wedge e_2 \to v'(0)$ dove e_1, e_2 è una coppia di vettori ortonormali e $v(t) = cos(t) + sen(t)e_1e_2$ è ben definita e definisce un isomorfismo di spazi vettoriali.

Il gruppo $Spin^c(V)$ può essere definito come

$$Spin^c(V) = Spin(V) \times U(1)/\pm 1$$

dove ± 1 agisce per moltiplicazione su entrambi i fattori. l'omomorfosmo di gruppi $Spin^c(V) \to SO(V) \times U(1)$ $(x, z) \to (\pi(x), z^2)$ è un rivestimento connesso a due fogli corrispondente al sottogruppo del gruppo fondamentale di indice due generato da $(1,1), (0,2) \in \pi_1(SO(V)) \times \pi_1(U(1))$ dove 1 denota il generatore sia di $\pi_1(SO(V)) = \mathbb{Z}/2$ che di $\pi_1(U(1)) = \mathbb{Z}$ (N.B. se $k \geq 3$ allora $(0,2) = 2(1,1)$).

Esiste un diagramma commutativo di estensioni di gruppi di Lie

$$\begin{tikzcd}
 & 1 \arrow[d] & 1 \arrow[d] & & \\
1 \arrow[r] & \pm 1 \arrow[r] \arrow[d] & Spin(V) \arrow[r, "\pi"] \arrow[d] & SO(V) \arrow[r] \arrow[d, equal] & 1 \\
1 \arrow[r] & U(1) \arrow[r] \arrow[d, "z^2"] & Spin^c(V) \arrow[r, "\pi^c"] \arrow[d, "\phi"] & SO(V) \arrow[r] & 1 \\
 & U(1) \arrow[r, equal] \arrow[d] & U(1) \arrow[d] & & \\
 & 1 & 1 & &
\end{tikzcd} \tag{5}$$

Dove $\phi(x, z) = z^2$, $\pi^c(x, z) = \pi(x)$. Si noti che le estensioni orizzontali sono centrali.

Una ulteriore possibile definizione equivalente di $Spin^c(V)$ è la seguente:

$Spin^c(V) \subset C^c(V) := C(V) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ è il sottogruppo moltiplicativo formato dagli elementi $x \otimes z$ con $x \in Spin(V)$ e $|z| = 1$.

2. Dimensione pari e Spinori

Sia adesso V uno spazio vettoriale complesso di dimensione complessa n dotato di un prodoto hermitiano h, possiamo considerare V come uno spazio vettoriale reale di dimensione $k = 2n$ dotato del prodotto scalare $re\, h$ e costruire come nella sezione precedente le algebre $C(V), C^c(V)$ ed i gruppi $Spin(V), Spin^c(V)$.

La dimensione complessa di $C^c(V)$ è $(2^n)^2$ ed è possibile identificare $C^c(V)$ con un algebra di endomorfismi di uno spazio vettoriale complesso di dimensione 2^n.
Si definisce lo spazio degli spinori $S = \bigwedge^*_{\mathbb{C}} V$, ed una applicazione $\mathbb{C}$-lineare $\gamma\colon V \otimes \mathbb{C} \to End(S)$ ponendo per $v \in V$ e $w \in S$

$$\gamma(v \otimes 1)w = v \wedge w - v \lrcorner w$$

dove $v\lrcorner$ è l'operatore aggiunto di $v\wedge$ rispetto alla metrica hermitiana h. Si noto che per ogni $v \in V$ $\gamma(v)$ è antiautoaggiunto.
Siccome $\gamma(v \otimes 1)^2 = -\|v\|^2 Id$ per ogni $v \in V$ l'applicazione $\gamma\colon V \otimes \mathbb{C} \to End(V)$ è iniettiva e si estende ad un unico omomorfismo $\mathbb{C}$-lineare $\gamma\colon C^c(V) \to End(S)$.

Theorem 6. *γ è un isomorfismo di $\mathbb{C}$-algebre.*

Proof. Vedi [A-B-S]. □

Il teorema 6 implica in particolare che S è un $C^c(V)$-modulo irriducibile.
Come rappresentazione di $Spin(V)$ e $Spin^c(V)$, S non è irriducibile, infatti $S^+ = \bigwedge^{pari} V$ e $S^- = \bigwedge^{disp} V$ sono sottospazi $Spin^c(V)$ invarianti.
Ogni apllicazione lineare $A\colon V \to V$ induce applicazioni lineari $A^\pm\colon S^\pm \to S^\pm$, $\wedge A\colon S \to S$.

Lemma 7. *Nelle ipotesi precedenti $det(A^+) = det(A^-) = det(A)^{2^{n-2}}$.*

Proof. Dimostriamo prima che esistono interi a, b dipendenti solo da n tali che $det(A^+) = det(A)^a$, $det(A^-) = det(A)^b$.
Se esiste un iperpiano $H \subset V$ tale che $Ah = h$ per ogni $h \in H$ scegliamo $e_1, ..., e_n$ base di V con $e_2, .., e_n \in H$, nella base $e_{\wedge I}$, $I \subset \{1, .., n\}$, di $S^\pm$ opportunamente ordinata, la matrice di $A^\pm$ è triangolare ed il lemma è facilmente verificato.
In generale siccome ogni applicazione lineare è composizione di applicazioni che lasciano fisso un iperpiano la conclusione segue dal teorema di Binet.
Il calcolo di a e b può essere fatto nel modo seguente. Se $A = dI$ allora $det(\wedge A) = d^{n(a+b)}$ e quindi

$$n(a+b) = \sum_{h=0}^{n} h\binom{n}{h} = \frac{d}{dt}_{|t=1}(1+t)^n = n2^{n-1}$$

$$na = \sum_{h=0}^{[\frac{n}{2}]} 2h\binom{n}{2h} = \frac{d}{dt}_{|t=1}\frac{1}{2}((1+t)^n + (1-t)^n) = n2^{n-2}$$ □

In particolare se $det(A) = 1$ anche $det(A^\pm) = 1$.

Definition . L'applicazione $V \times S \to S$, $(v, x) \to \gamma(v)x$ è detta moltiplicazione di Clifford.

Proposition 8. Rispetto alla metrica su S indotta da H si ha

$$\gamma(Spin(V)) \subset SU(S^+) \times SU(S^-) \quad \gamma(Spin^c(V)) \subset U(S^+) \times U(S^-)$$

Chiaramente la seconda relazione segue dalla prima essendo ogni elemento di $Spin^c$ il prodotto di un elemento di $Spin$ per un numero complesso di norma 1.

Sia $e_1, ..., e_n$ una $\mathbb{C}$-base di V ortonormale allora $\gamma(e_1)$ permuta gli elementi della base $e^{\wedge I}$ di S e quindi in tale base si rappresenta con una matrice

$$\gamma(e_1) = \begin{pmatrix} 0 & B \\ C & 0 \end{pmatrix}$$

con B, C matrici di rango 2^{n-1} e determinante $= \pm 1$. Dunque per ogni $v \in V$ con $\|v\| = 1$ $\gamma(v)$ è una isometria e quindi $\gamma(Spin(V)) \subset U(S^+) \times U(S^-)$.

Se $A \in SU(V)$ allora nella base $\epsilon^{\wedge I}$ $\epsilon_i = Ae_i$ si ha

$$\gamma(e_1) = \begin{pmatrix} 0 & A^+B(A^-)^{-1} \\ A^-C(A^+)^{-1} & 0 \end{pmatrix}$$

e siccome $det(A^{\pm}) = 1$ si ha che, nella base $\epsilon^{\wedge I}$

$$\gamma(e_1\epsilon_1) = \begin{pmatrix} BA^-C(A^+)^{-1} & 0 \\ 0 & CA^+B(A^-)^{-1} \end{pmatrix}$$

Essendo e_1, ϵ_1 due vettori arbitrari di norma uno segue che per ogni $x \in Spin(V)$

$$\gamma(x) = \begin{pmatrix} B' & 0 \\ 0 & C' \end{pmatrix}$$

con $det(B') = \pm 1, det(C') = \pm 1$ e essendo $Spin(V)$ connesso deve necessariamente essere $det(B') = 1, det(C') = 1$. □

Si noti che se la dimensione complessa di V è 2 ritroviamo l'isomorfismo $Spin(V) = SU(S^+) \times SU(S^-)$.

È consuetudine denotare con $\varrho \colon \bigwedge^2 V \to su(S^+)$ il morfismo di algebre di Lie relativo al morfismo di gruppi $\gamma \colon Spin(V) \to SU(S^+)$ e con $\varrho_c \colon \bigwedge^2 V \otimes \mathbb{C} \to sl(S^+)$ il suo complessificato (cf. [K-M] pag 2).

Più esplicitamente se e_1, e_2 sono vettori ortonormali in V si ha $\varrho(e_1 \wedge e_2) = \gamma(e_1)\gamma(e_2)_{|S^+} = -\gamma_+(e_1)^*\gamma_+(e_2)$ dove si è posto $\gamma_+ \colon V \to \mathrm{Hom}(S^+, S^-)$ la restrizione di γ (cf. [D-K] pag 77).

Si noti che se la dimensione reale di V è 4 e $\bigwedge^2 V = \bigwedge_+ V \oplus \bigwedge_- V$ sono gli autospazi di $*$ allora $\ker \varrho = \bigwedge_- V$ e quindi ϱ è un isomorfismo fra $\bigwedge_+ V$ e $su(2)$.

Remark. . Il prodotto di Clifford è equivariante rispetto alle rappresentazioni π e γ del gruppo $Spin(V)$, cioè per ogni $x \in Spin(V), v \in V, s \in S$ si ha

$$\gamma(\pi(x)v)(\gamma(x)s) = \gamma(x)\gamma(v)s$$

Risultato analogo vale per il prodotto di Clifford esteso $V^c \times S \to S$ e per le rappresentazioni di $Spin^c$.

Supponiamo adesso che la dimensione complessa di V sia almeno 2, allora essendo $SU(V)$ semplicemente connesso esiste un omomorfismo $\tilde{J} \colon SU(V) \to Spin(V)$ che solleva l'omomorfismo naturale $J \colon SU(V) \to SO(V)$. Il morfismo naturale $J \colon U(V) \to SO(V)$ induce un epimorfismo fra i rispettivi π_1 e quindi non è sollevabile ad un omomorfismo $U(V) \to Spin(V)$. Se invece si considera l'omomorfismo $J_d: U(V) \to SO(V) \times U(1)$ definito da $E \to (J(E), det(E))$ esiste un sollevamento ad un omomorfismo $\tilde{J}: U(V) \to Spin^c(V)$. Infatti le immagini del generatore di $\pi_1(U(V)) = \mathbb{Z}$ tramite J_* e det_* sono generatori rispettivamente di $SO(V)$ e $U(1)$ e quindi $J_{d*}\pi_1(U(V))$ è contenuto in $\pi_1(Spin^c(V))$.

Struttura quaternionica di Spin(4). Sia $\mathbb{H} = \mathbb{C} \oplus j\mathbb{C}$ il corpo dei quaternioni (j è l'elemento tale che $j^2 = -1$, $ja = \overline{a}\, j$ per ogni $a \in \mathbb{C}$).

$\mathbb{H}$ ha dunque una struttura naturale di spazio vettoriale complesso ed esiste un prodotto hermitiano canonico che ha $e_1 = 1, e_2 = j$ come base ortonormale.

Si noti che ponendo $V = \mathbb{H}$ si ha $S^- = V = \mathbb{H}$. Possiamo porre una struttura quaternionica su $S^+ = \mathbb{C} \oplus e_1 \wedge e_2\mathbb{C}$ identificando j con $e_1 \wedge e_2$. In tal modo è definita una struttura di spazio vettoriale quaternionico su S.

Proposition 9. *L'immagine di $C(V)$ in $End(S)$ è esattamente $End_j(S)$= insieme degli endomorfismi che commutano con la moltiplicazione a sinistra di j.*

Proof. Semplice e noiosa verifica lasciata al lettore. □

3. Strutture di *Spin* e *Spin*^{c}

Sia M una varietà Riemanniana orientata di dimensione k con fibrato tangente TM e fibrato dei riferimenti ortonormali orientati $P_{SO(k)}$.

Definition . Una struttura di *Spin* (risp.: *Spin*^{c}) è un fibrato principale $P_{Spin(k)}$ (risp.: $P_{Spin^c(k)}$) con gruppo di struttura $Spin(k)$ (risp.: $Spin^c(k)$) tale che induce il fibrato $P_{SO(k)}$ tramite l'omomorfismo π (risp.: π^c).

Per semplicità di notazione indichiamo $SO = SO(k), Spin = Spin(k), Spin^c = Spin^c(k)$. Per ogni gruppo di Lie G indichiamo con $\underline{G}$ il fascio delle funzioni differenziabili su M a valori in G. Le classi di isomorfismo di fibrati G-principali sono classificate dall'insieme puntato $H^1(M, \underline{G})$ (vedi [Laufer] pag 106). Inoltre per ogni omomorfismo di gruppi di Lie $G \to H$ le applicazioni indotte

$$\{fibrati\, G - principali\} \to \{fibrati\, H - principali\} \quad H^1(M, \underline{G}) \to H^1(M, \underline{H})$$

commutano con i rispettivi isomorfismi Sia $g \in H^1(M, \underline{SO})$ la classe di isomorfismo del fibrato dei riferimenti principali su TM, l'estensione centrale

$$0 \longrightarrow \pm 1 \longrightarrow Spin(V) \xrightarrow{\pi} SO(V) \longrightarrow 0$$

induce una successione esatta di insiemi di coomologia su M

$$H^1(\pm 1) \longrightarrow H^1(\underline{Spin}) \xrightarrow{\pi} H^1(\underline{SO}) \xrightarrow{\delta} H^2(\pm 1)$$

e $\delta(g) = w_2$ è la seconda classe di Stiefel-Whitney di M.

Esistono strutture di Spin se e soltanto se $w_2 = 0$; se M è semplicemente connessa esiste al più una struttura di Spin. Affinché esista una struttura di $Spin^c$ le ostruzioni sono più deboli, vale infatti il seguente

Theorem 10. *Esiste una applicazione surgettiva*

$$\phi\colon \{\mathit{Strutture\ di\ Spin}^c\ \mathit{su}\ M\} \to \{a \in H^2(M, \mathbb{Z}) | p(a) = w_2 \in H^2(M, \mathbb{Z}/2)\}$$

dove p è indotta dalla proiezione naturale $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/2$.
Se $H^2(M, \mathbb{Z})$ è senza 2-torsione allora ϕ è anche iniettiva.
Innanzitutto identifichiamo il gruppo $H^2(M, \mathbb{Z})$ con $H^1(\underline{U(1)})$ tramite l'operatore di bordo nella successione esatta di coomologia associata alla successione esponenziale.
La successione esatta

$$0 \longrightarrow \pm 1 \longrightarrow \underline{U(1)} \xrightarrow{z^2} \underline{U(1)} \longrightarrow 0$$

induce una successione di gruppi

$$H^1(\underline{U(1)}) \xrightarrow{q} H^1(\underline{U(1)}) \xrightarrow{p} H^2(\pm 1)$$

Lemma 11. *Esiste un diagramma commutativo di insiemi*

$$\begin{array}{ccc} H^1(\underline{Spin^c}) & \xrightarrow{\pi^c} & H^1(\underline{SO}) \\ \downarrow \phi & & \downarrow \delta \\ H^1(\underline{U(1)}) & \xrightarrow{p} & H^2(M, \pm 1) \end{array}$$

In particolare se $h \in H^1(\underline{Spin^c})$ è una struttura di $Spin^c$ allora $p\phi(h) = w_2$.

Proof. Se $\{(h_{ij}, u_{ij})\}$, $h_{ij} \in \underline{Spin}$, $u_{ij} \in \underline{U(1)}$ è un cociclo rappresentante h allora $p\phi(h) = \{u_{ij}u_{jk}u_{ki}\}$ e $\delta\pi^c(h) = \{h_{ij}h_{jk}h_{ki}\}$ mentre per la condizione di cociclo si ha $u_{ij}u_{jk}u_{ki} = h_{ij}h_{jk}h_{ki}$ per ogni i, j, k. □

La surgettività della ϕ del teorema 10 segue dal fatto che $U(1) \subset Z(Spin^c)$ e quindi per ogni coppia di cocicli $h \in H^1(\underline{Spin^c}), u \in H^1(\underline{U(1)})$ il loro prodotto $hu = \{h_{ij}u_{ij})$ è ancora un cociclo e $\phi(hu) = \phi(h)q(u)$.

Lemma 12. *se q è iniettiva (e.g. se $H^2(\mathbb{Z})$ non ha 2-torsione) allora anche ϕ è iniettiva.*

Proof. Se $h_1, h_2 \in H^1(\underline{Spin^c})$ tali che $\phi(h_1) = \phi(h_2)$, possiamo trovare $g_{ij} \in \underline{Spin}$ e $u_{ij}, v_{ij} \in \underline{U(1)}$ tali che h_1, h_2 si rappresentano con i cocicli $\{g_{ij}u_{ij}\}, \{g_{ij}v_{ij}\}$.
Vale la relazione $u_{ij}u_{jk}u_{ki} = v_{ij}v_{jk}v_{ki}$ per ogni i, j, k e quindi uv^{-1} è un cociclo appartenente al nucleo di q e dunque $uv_{ij}^{-1} = t_i t_j^{-1}$ ed i cocicli h_1, h_2 sono equivalenti.

Strutture quasi complesse e strutture di $Spin^c$

Una struttura di fibrato vettoriale complesso su TM induce un morfismo di fibrati principali $P_{U(n)} \to P_{SO(2n)}$. Siccome l'omomorfismo $U(n) \to SO(2n)$ si solleva ad un omomorfismo $U(n) \xrightarrow{\tilde{j}} Spin^c(2n)$ ogni struttura quasi complessa definisce in modo canonico una struttura di

$Spin^c$, P_{Spin^c} su M. Siccome la composizione di ϕ con $\tilde{J}$ è il determinante si ha $\phi(P_{Spin^c}) = c_1(TM)$.

Fibrati degli Spinori.

Una stuttura di Spin $P_{Spin(2n)}$ su una varietà Riemanniana M di dimensione $2n$ definisce due SU fibrati vettoriali complessi

$$W^+ = P_{Spin} \times_{Spin} S^+ \qquad \frac{1}{2} - spinori$$

$$W^- = P_{Spin} \times_{Spin} S^- \qquad -\frac{1}{2} - spinori$$

Costruzione analoga può essere fatta per una struttura di $Spin^c$, P_{Spin^c}. In questo caso $W^\pm$ sono fibrati unitari con prima classe di Chern non banale, si ha infatti

Proposition 13. $c_1(W^+) = c_1(W^-) = \phi(P_{Spin^c})^{2^{n-2}} \in H^1(M, \underline{U(1)})$..

Proof. La dimensione complessa di S^+ è 2^{n-1}, dunque per ogni $g \in Spin(2n)$, $v \in U(1)$, il determinante di $\gamma(gv) \in U(S^+)$ è esattamente $v^{2^{n-1}} = \phi(gv)^{2^{n-2}}$. Lo stesso ragionamento si applica a S^-. □

Grazie alla proprietà di equivarianza la moltiplicazione di Clifford si estende ad un morfismo di fibrati $TM \otimes \mathbb{C} \to \mathrm{Hom}(W^+, W^-)$ che in dimensione $2n = 4$ diventa un isomorfismo di fibrati. Inoltre la coppia di $U(2)$ fibrati W^+, W^- insieme all' isomorfismo $det(W^+) = det(W^-)$ determina unicamente la struttura di $Spin^c$ su M.

Per prima cosa si definisce una applicazione $\mathbb{C}$-antilineare $f \to \overline{f}$ su $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(W^+, W^-)$ nel modo seguente. Siano e_1, e_2, ϵ_1, ϵ_2 riferimenti ortonormali locali di W^+ e W^- rispettivamente tali che $e_1 \wedge e_2 = \epsilon_1 \wedge \epsilon_2$. Se $f\colon W^+ \to W^-$ è rispetto ai precedenti framing definita dalla matrice

$$f = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$$

si pone

$$\overline{f} = \begin{pmatrix} \overline{d} & -\overline{b} \\ -\overline{c} & \overline{a} \end{pmatrix}$$

ed una semplice verifica mostra che si tratta di una buona definizione.

Nel caso degli spinori la mappa γ definisce un isomorfismo di fibrati vettoriali reali $TM = \{f = \overline{f}\}$ e quindi $W^\pm$ determinano il fibrato tangente.

La struttura di $Spin^c$ si recupera considerando le coppie di riferimenti ortonormali $e_1, e_2 \in W^+$, $\epsilon_1, \epsilon_2 \in W^-$ tali che $e_1 \wedge e_2 = \epsilon_1 \wedge \epsilon_2$.

4. Operatore di Dirac ed equazione di Monopolo

Sia M una varietà Riemanniana orientata di dimensione reale $2n$, la metrica Riemanniana g induce un isomorfismo fra i fibrati tangente TM e cotangente Ω^1 e quindi tutti i ragionamenti fatti nei paragrafi precedenti per TM restano validi anche per Ω^1.

Sia dunque P_{Spin^c} una struttura di $Spin^c$ su M con fibrati spinori W^+, W^- e moltiplicazione di Clifford $\gamma: \Omega^1 \otimes \mathbb{C} \to \mathrm{Hom}(W^+, W^-)$. Denotiamo con

$$L = P_{Spin^c} \times_{Spin^c} \mathbb{C} \qquad P_{U(1)} = P_{Spin^c} \times_{Spin^c} U(1)$$

dove il gruppo $Spin^c(2n)$ agisce su $\mathbb{C}$ e $U(1)$ tramite l'omomorfismo $\phi: Spin^c \to U(1)$. Si noti che la prima classe di Chern di L è esattamente $\phi(P_{Spin^c}) \in H^2(M, \mathbb{Z})$.

Si noti che il fibrato principale P_{Spin^c} è un rivestimento doppio del $SO(2n) \times U(1)$ fibrato principale $P_{SO} \times_M P_{U(1)}$ e quindi per ogni connessione hermitiana A su L esiste unica una connessione $\nabla_{A,g}$ su P_{Spin^c} che induce la connessione di Levi-Civita su $P_{SO(2n)}$ ed A su L. Indichiamo con la stessa lettera $\nabla_{A,g}$ le connessioni indotte sui fibrati W^+ e W^-.

Definition . *L'operatore di Dirac* $D_{g,A}: \Gamma(W^+) \to \Gamma(W^-)$ relativo alla struttura P_{Spin^c}, alla metrica g ed alla connessione A, è per definizione la composizione di $\nabla_{A,g}: \Gamma(W^+) \to \Gamma(\Omega^1 \otimes W^-)$ e della moltiplicazione di Clifford sulle sezioni globali $\gamma: \Gamma(\Omega^1 \otimes W^+) \to \Gamma(W^-)$.

L'operatore di Dirac è un operatore ellittico, infatti per ogni f funzione differenziabile e s sezione di W^+ si ha $D_{A,g}(fs) = \gamma(df \wedge s) + \gamma(f \nabla_{A,g} s)$ e siccome γ è C^∞ lineare solamente il primo addendo contribuisce alla determinazione del simbolo σ. Abbiamo dunque $\sigma(df)s = \gamma(df \wedge s)$ e quindi per ogni $\xi \in \Omega^1$ e $s \in W^+$, $\sigma(\xi)s = \gamma(\xi)s$ e per ogni $\xi \neq 0$, $\gamma(\xi) \in \mathrm{Hom}(W^+, W^-)$ è in isomorfismo sulle fibre.

Dunque se M è compatta l'operatore di Dirac è Fredholm ed il suo indice non dipende da A e g.

Infine se E è un fibrato vettoriale complesso su M con connessione d_E possiamo definire il prodotto tensoriale di connessioni $\nabla_{A,g} \otimes d_E: W^+ \otimes E \to \Omega^1 \otimes W^+ \otimes E$ e componendo con la moltiplicazione di Clifford si ottiene *l'operatore di Dirac Accoppiato* $D_{A,g,d_E}: \Gamma(W^+ \otimes E) \to \Gamma(W^- \otimes E)$.

Come sopra anche l'operatore di Dirac accoppiato è ellittico ed il suo indice non dipende dalla scelta di A, g, d_E.

Equazione di Monopolo

Siano M, P_{Spin^c}, L, W^+ e W^- come sopra, per ogni connessione hermitiana A su L siano D_A l'operatore di Dirac relativo e $F_A \in \bigwedge^2 \Omega^1$ la sua curvatura.

In generale un prodotto hermitiano su uno spazio vettoriale complesso S di dimensione m, definisce univocamente una applicazione quadratica hermitiana $S \to sl(S)$, $s \to (ss^*)_0$ nel modo seguente.

Un vettore $s \in S$ definisce in modo ovvio una applicazione lineare $s: \mathbb{C} \to S$, la composizione $ss^*: S \to S$ è una applicazione di rango 1 e traccia $|s|^2$ e si pone $(ss^*)_0 = ss^* - \frac{|s|^2}{m} Id$.

La stessa costruzione può essere fatta per il fibrato hermitiano W^+ ed ad ogni sezione s di W^+ si associa una sezione di $sl(W^+)$.

Una coppia (A, s), A connessione hermitiana in L, s sezione di W^+, è una soluzione dell'equazione di monopolo se

$$D_A(s) = 0 \qquad\qquad \varrho(F_A) = -(ss^*)_0$$

Si noti che in dimensione $2n = 4$ vale $\varrho(F_A) = \varrho(F_A^+)$ e quindi se A è ASD allora $(A, 0)$ è una soluzione dell'equazione.

Bibliografia

[[A-B-S]] M.F.Atiyah, R.Bott, A.Shapiro: *Clifford modules.* Topology Vol. **3**, Suppl. 1, (1964) 3-38.

[[Laufer]] H.B.Laufer: *Normal twodimensional singularities.* Princeton University press (1971).

[[D-K]] S.K. Donaldson, P.B. Kronheimer: *The geometry of four-manifolds.* Oxford University Press (1990).

[[K-M]] P.B.Kronheimer, T.S.Mrowka: *The genus of embedded surfaces in the projective plane.* Preprint 1994.