Sapienza Università: corso di Algebra 3, 2016-17

1. Anelli di successioni

1.1. **Successioni arbitrarie.** Nel seguito sia $\mathbb{K}$ un campo fissato, e denotiamo con A l'anello di tutte le successioni $a = \{a_i\}$, $i \in \mathbb{N}$. Per ogni indice i indichiamo con $\delta^i \in A$ la successione "delta di Kronecker": $\delta^i_i = 1$ e $\delta^i_j = 0$ per ogni $j \neq i$.

Per ogni i l'ideale $\mathfrak{m}_i = \{a \in A \mid a_i = 0\}$ è massimale in quanto nucleo dell'applicazione $A \to \mathbb{K}$ di valutazione in $i \in \mathbb{N}$. Si noti che $a \in \mathfrak{m}_i$ se e solo se $a\delta^i = 0$, e quindi $\mathfrak{m}_i$ è contenuto nel nucleo del morfismo naturale $A \to A_{\delta^i}$ e di conseguenza si ha una catena di isomorfismi:

$$A_{\delta^i} \xrightarrow{\simeq} A_{\mathfrak{m}_i} \xrightarrow{\simeq} \frac{A}{\mathfrak{m}_i} = \mathbb{K}\,.$$

Tuttavia **non tutti** gli ideali massimali di A sono del tipo $\mathfrak{m}_i$, infatti l'ideale $I \subset A$ delle successioni definitivamente nulle non è contenuto in alcun $\mathfrak{m}_i$. Si noti che I non è primo in A: infatti se prendiamo la successione $a \in A$, $a_n = 1 + (-1)^n$, si ha $a(2-a) = 0$, sebbene $a, 2-a \notin I$.

Lemma 1. *L'anello A contiene una quantità più che numerabile di ideali massimali.*

Dimostrazione. Ad ogni numero reale $t \in [1, 9]$ associamo il sottoinsieme $U_t \in \mathbb{N}$ formato da tutte le parti intere dei numeri $10^n t$. Si verifica facilmente che se $t \neq s$, allora $U_t \cap U_s$ è un insieme finito.

Sempre per ogni $t \in [1, 9]$ definiamo $J_t \subset A$ come l'ideale delle successioni a tali che $a_i = 0$ per ogni $i \in U_t$. Siccome U_t è infinito, l'ideale $I + J_t$ è proprio e possiamo scegliere un ideale massimale M_t che lo contiene. Se fosse $M_t = M_s$, allora $I + J_t + J_s$ sarebbe un ideale proprio e questo implica $s = t$. Infatti, sia $r \in J_t$ la successione che vale 1 in $\mathbb{N} - U_t$ e 0 altrimenti, e sia $s \in J_s$ la successione che vale 1 in $U_t - U_s$ e 0 altrimenti. Allora $r + s$ vale 0 in $U_t \cap U_s$ ed 1 altrimenti, quindi se $s \neq t$ allora $U_t \cap U_s$ è finito e $I + J_t + J_s = A$. □

1.2. **Successioni di Cauchy.** La situazione cambia drasticamente se consideriamo adesso il sottoanello $B \subset A$ delle successioni definitivamente costanti: se dotiamo $\mathbb{K}$ della distanza $d(x, y) = 1$ se $x \neq y$, allora B coincide con il sottoanello delle successioni di Cauchy a I con l'ideale delle successioni infinitesimali.

Per abuso di notazione continuiamo a indicare $\mathfrak{m}_i \subset B$ l'ideale massimale delle successioni che si annullano in i. L'ideale I è massimale in B in quanto nucleo dell'applicazione $B \to \mathbb{K}$, $a \mapsto a_n (n >> 0)$. Indichiamo con $r^n \in B$ la successione

$$r^n = 1 - \sum_{j<n} \delta^j, \qquad r^n_i = \begin{cases} 0 & \text{per } i < n, \\ 1 & \text{per } i \geq n, \end{cases}$$

Siccome $a \in I$ se e solo se esiste n tale che $ar^n = 0$, il ragionamento precedente mostra che

$$B_I \xrightarrow{\simeq} \frac{B}{I} = \mathbb{K}\,.$$

Lemma 2. *Gli ideali $I, \mathfrak{m}_i$ sono gli unici ideali primi di B, e l'anello B non è noetheriano.*

Dimostrazione. Se I_n indica l'ideale delle successioni a tali che $a_i = 0$ per ogni $i > n$, la catena ascendente di ideali $I_0 \subset I_1 \subset \cdots$ non è stazionaria. Similmente se J_n è l'ideale delle successioni a tali che $a_i = 0$ per ogni $i < n$, allora la catena discendente di ideali $J_0 \supset J_1 \supset \cdots$ non è stazionaria.

Sia $P \subset B$ un ideale primo siccome $0 = \delta^i\delta^j \in P$ per ogni $i \neq j$, possono presentarsi due possibilità:

1) P contiene tutte le successioni δ: in tal caso $I \subset P$ e siccome I è massimale ne consegue $I = P$.

2) $\delta^i \notin P$ per qualche i. Ma allora, per ogni $a \in B$ tale che $a_i = 0$ si ha $a\delta^i = 0$ e quindi $a \in P$; in altri termini $\mathfrak{n}_i \subset P$ e quindi $\mathfrak{n}_i = P$.

□