Sapienza Università: corso di Algebra 3, 2016-17

1. Un criterio di piattezza

Nel seguito indichiamo con A un anello commutativo e con M un A-modulo. Per semplicità notazionale scriveremo $\otimes$ in luogo di $\otimes_A$.

Teorema 1. *Il modulo M è piatto se per ogni ideale finitamente generato $I \subset A$ il morfismo naturale $I \otimes M \to A \otimes M = M$ è iniettivo.*

Nel libro di Atiyah a Macdonald tale fatto è presentato come esercizio sul funtore Tor. In questa nota useremo un approccio basato sulla caccia al diagramma.

Lemma 2. *Il modulo M è piatto se per ogni $n > 0$ ed ogni sottomodulo $N \subset A^n$ il morfismo naturale $N \otimes M \to A^n \otimes M$ è iniettivo.*

Dimostrazione. Sappiamo che M è piatto se per ogni successione esatta corta

$$0 \to P \to Q \to R \xrightarrow{f} R \to 0$$

di A-moduli con Q finitamente generato, il morfismo $P \otimes M \to Q \otimes M$ è iniettivo. Scegliamo un omomorfismo surgettivo $g\colon A^n \to Q$ e indichiamo con $N = \mathrm{Ker}(g)$, $F = \mathrm{Ker}(fg)$. Abbiamo allora un diagramma commutativo a righe esatte

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & F \arrow[r] \arrow[d] & A^n \arrow[r, "fg"] \arrow[d, "g"] & R \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & P \arrow[r] & Q \arrow[r, "f"] & R \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

che per il lemma del serpente si estende ad un diagramma con righe e colonne esatte

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & & \\
 & N \arrow[r, equal] \arrow[d] & N \arrow[d] & & \\
0 \arrow[r] & F \arrow[r] \arrow[d] & A^n \arrow[r, "fg"] \arrow[d, "g"] & R \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & P \arrow[r] \arrow[d] & Q \arrow[r, "f"] \arrow[d] & R \arrow[r] & 0 \\
 & 0 & 0 & &
\end{tikzcd}$$

Tensorizzando per M si ottiene

$$\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[d] & & \\
 & N\otimes M \arrow[r, equal] \arrow[d] & N\otimes M \arrow[d] & & \\
0 \arrow[r] & F\otimes M \arrow[r] \arrow[d, "\alpha"] & A^n\otimes M \arrow[r, "fg"] \arrow[d, "g"] & R\otimes M \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
 & P\otimes M \arrow[r, "\beta"] \arrow[d] & Q\otimes M \arrow[r, "f"] \arrow[d] & R\otimes M \arrow[r] & 0 \\
 & 0 & 0 & &
\end{tikzcd}$$

ed una semplice caccia al diagramma (esercizio) mostra che i due morfismo α e $\beta\alpha$ hanno lo stesso nucleo e quindi che β è iniettiva. □

Lemma 3. *Il modulo M è piatto se per ogni ideale $I \subset A$ il morfismo naturale $I \otimes M \to A \otimes M = M$ è iniettivo.*

Dimostrazione. Dimostriamo per induzione su n che le ipotesi del lemma precedente sono soddisfatte. Il caso $n = 1$ è vero per ipotesi, supponiamo $n > 1$ e sia

$$F \subset A^n = \{(a_1, \dots, a_n) \mid a_i \in A\}$$

un sottomodulo. Consideriamo la ovvia decomposizione $A^n = A^{n-1} \oplus A$ e indichiamo con

$$p\colon A^n \to A, \qquad p(a_1, \dots, a_n) = a_n,$$

la proiezione. Siccome il prodotto tensoriale commuta con le somme dirette si ha $A^n \otimes M = A^{n-1} \otimes M \oplus A \otimes M$. Se $I = p(F) \subset A$ e $G = F \cap A^{n-1} = \mathrm{Ker}(p_{|F})$ si ha un diagramma commutativo con righe e colonne esatte

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & G \arrow[r] \arrow[d] & F \arrow[r, "p"] \arrow[d] & I \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & A^{n-1} \arrow[r] & A^n \arrow[r, "p"] & A \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Tensorizzando per M ed applicando l'ipotesi induttiva si ha un nuovo diagramma commutativo con righe e colonne esatte

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & & 0 \arrow[d] & \\
 & G\otimes M \arrow[r] \arrow[d] & F\otimes M \arrow[r, "p"] \arrow[d, "\alpha"] & I\otimes M \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & A^{n-1}\otimes M \arrow[r] & A^n\otimes M \arrow[r, "p"] & A\otimes M \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

ed una banalissima caccia al diagramma mostra l'iniettività di α. □

Dimostrazione del teorema. Supponiamo che M non sia piatto, allora esiste un ideale $I \subset A$ ed un elemento non nullo $u = \sum_{i=1}^n a_i \otimes m_i \in I \otimes M$, $a_i \in I$, $m_i \in M$, tale che $\sum_{i=1}^n a_i m_i = 0$. Se $J \subset I$ è l'ideale generato da $a_1, \dots, a_n$, a fortiori l'elemento u non è nullo in $J \otimes M$ e questo contraddice le ipotesi del teorema. □

Corollario 4. *Se A è un dominio ad ideali principali (e.g. $A = \mathbb{Z}, \mathbb{K}[x]$), un A-modulo M è piatto se e solo se per ogni $a \neq 0 \in A$ la moltiplicazione*

$$a\colon M \to M, \qquad m \mapsto am,$$

è iniettiva.

Dimostrazione. Ogni ideale non nullo di A è dato dall'immagine della moltiplicazione

$$a\colon A \to A, \qquad x \mapsto ax,$$

per un opportuno elemento $a \neq 0 \in A$. □

2. Le formula del cambio di base

Nel seguito supporremo $f\colon A \to B$ un morfismo di anelli, M un A-modulo ed N un B-modulo. Allora N è anche un A-modulo per restrizione degli scalari tramite f, mentre $M \otimes_A B$ è un B-modulo per estensione degli scalari:

$$an = f(a)n, \quad b(m \otimes c) = m \otimes bc, \qquad a \in A;\, b, c \in B;\, n \in N;\, m \in M\,.$$

Similmente il prodotto $B \times N \to N$ induce una struttura di B-modulo su $\operatorname{Hom}_A(N, M)$, $\operatorname{Hom}_A(M, N)$ e $M \otimes_A N$:

- $\alpha \in \operatorname{Hom}_A(M, N)$, $b \in B$, $(b\alpha)(m) = b\alpha(m)$;
- $\gamma \in \operatorname{Hom}_A(N, M)$, $b \in B$, $(b\gamma)(n) = \gamma(nb)$;
- $m \otimes n \in M \otimes_A N$, $b \in B$, $b(m \otimes n) = m \otimes bn$.

Teorema 5 (Formula del cambio di base)**.** *Nelle notazioni precedenti si hanno isomorfismi naturali di B-moduli:*

1. $M \otimes_A N = (M \otimes_A B) \otimes_B N$;
2. $\operatorname{Hom}_A(M, N) = \operatorname{Hom}_B(M \otimes_A B, N)$;
3. $\operatorname{Hom}_A(N, M) = \operatorname{Hom}_B(N, \operatorname{Hom}_A(B, M))$.

Dimostrazione. Gli isomorfismi sono quelli definiti nel modo più semplice, e talvolta gli unici che abbiano senso. Per la precisione:

$$\theta\colon M \otimes_A N \to (M \otimes_A B) \otimes_B N, \quad \theta(m \otimes n) = m \otimes 1 \otimes n, \quad \theta^{-1}(m \otimes b \otimes n) = m \otimes bn\,.$$

$$\tau\colon \operatorname{Hom}_A(M, N) \to \operatorname{Hom}_B(M \otimes_A B, N), \quad \tau(f)(m \otimes b) = bf(m), \quad \tau^{-1}(g)(m) = g(m \otimes 1)\,.$$

$$\sigma\colon \operatorname{Hom}_A(N, M) \to \operatorname{Hom}_B(N, \operatorname{Hom}_A(B, M)), \quad \sigma(f)(n)(b) = f(nb), \quad \sigma^{-1}(g)(n) = g(n)(1)\,.$$

Lasciamo per essrcizio il compito (non esaltante) di verificare che le estensioni B-lineari delle precedenti formule siano tutte ben definite ed isomorfismi. □

Corollario 6. *Nelle notazioni precedenti:*

1. *se J è un A-modulo iniettivo, allora* $\operatorname{Hom}_A(B, J)$ *è un B-modulo iniettivo.*
2. *se P è un A-modulo proiettivo, allora $P \otimes_A B$ è un B-modulo proiettivo.*
3. *se M è un A-modulo piatto, allora $M \otimes_A B$ è un B-modulo piatto.*

Dimostrazione. 1) Se $0 \to N_1 \to N_2$ è esatta di B-moduli è ancora esatta come successione di A-moduli. Siccome J è iniettivo su A, per le formule di cambio di base si hanno due successioni esatte, canonicamente isomorfe tra loro:

$$\operatorname{Hom}_A(N_2, J) \to \operatorname{Hom}_A(N_1, J) \to 0,$$

$$\operatorname{Hom}_B(N_2, \operatorname{Hom}_A(B, J)) \to \operatorname{Hom}_B(N_1, \operatorname{Hom}_A(B, J)) \to 0\,.$$

Le dimostrazioni dei punti 2 e 3 sono del tutto simili e seguono rispettivamente dalle formule

$$\operatorname{Hom}_A(P, N) = \operatorname{Hom}_B(P \otimes_A B, N), \qquad M \otimes_A N = (M \otimes_A B) \otimes_B N,$$

valide per ogni B-modulo N. □

Corollario 7. *Nelle notazioni precedenti, il morfismo f è piatto se e solo se ogni B-modulo iniettivo è iniettivo come A-modulo.*

Dimostrazione. Supponiamo f piatto e sia I un B-modulo iniettivo. Allora per ogni successione esatta di A-moduli $0 \to M_1 \to M_2$, le successioni

$$0 \to M_1 \otimes_A B \to M_2 \otimes_A B, \qquad \mathrm{Hom}_B(M_2 \otimes_A B, I) \to \mathrm{Hom}_B(M_1 \otimes_A B, I) \to 0$$

sono esatte e per le formula di cambio di base anche la successione

$$\mathrm{Hom}_A(M_2, I) \to \mathrm{Hom}_A(M_1, I) \to 0$$

è esatta.

Viceversa se f non è piatto esiste un morfismo iniettivo di A-moduli $\alpha\colon M_1 \to M_2$ tale che $\alpha\colon M_1 \otimes_A B \to M_2 \otimes_A B$ ha nucleo non banale K. Sia adesso $\beta\colon K \to I$ un morfismo non banale a valori in un B-modulo iniettivo I, tale morfismo si può estendere ad un morfismo

$$\gamma \in \mathrm{Hom}_B(M_1 \otimes_A B, I) = \mathrm{Hom}_A(M_1, I)$$

il quale non ammette estensioni a morfismi in $\mathrm{Hom}_B(M_2 \otimes_A B, I) = \mathrm{Hom}_A(M_2, I)$, e quindi I non è iniettivo come A-modulo. $\square$

3. Esercizi vari

Esercizio 8. Siano A un anello e $x, y \in A$. Provare che se $x + y$ è invertibile e xy è nilpotente, allora l'applicazione naturale

$$A \to \frac{A}{(x^n)} \times \frac{A}{(y^n)}$$

è un isomorfismo per $n >> 0$.

Esercizio 9. Sia e un idempotente in un anello A, ossia un elemento tale che $e^2 = e$. Provare che $1 - 2e$ è invertibile.

Esercizio 10. Sia $I \subset A$ un ideale tale che $I^2 = 0$. Provare che la proiezione $A \to A/I$ induce una bigezione tra gli idempotenti di A e gli idempotenti di A/I.

Esercizio 11. Sia A l'anello delle funzioni reali continue su uno spazio topologico infinito e sia $D \subset A$ il sottoinsieme delle funzioni che si annullano in infiniti punti. Provare che D è unione di ideali primi.

Esercizio 12. Siano A, B due anelli non nulli e $C = A \times B$. Si consideri su A e B la struttura di C-modulo indotta dalle proiezioni naturali $C \to A$ e $C \to B$. Provare che $\mathrm{Hom}_C(A, B) = 0$ e dedurre che A non è un C-modulo libero.

Esercizio 13. Sia M_i, $i \in I$, una famiglia di A-moduli. Provare che

(1) $\bigoplus_i M_i$ è proiettivo se e solo se ogni M_i è proiettivo;
(2) $\bigoplus_i M_i$ è piatto se e solo se ogni M_i è piatto;
(3) $\prod_i M_i$ è iniettivo se e solo se ogni M_i è iniettivo.

Dedurre che ogni addendo diretto di un modulo libero è piatto e quindi che ogni modulo proiettivo è piatto.

Esercizio 14. Dimostrare che ogni campo di caratteristica 0 è uno $\mathbb{Z}$-modulo piatto ed iniettivo, ma non proiettivo.

Esercizio 15. Sia $0 \to P \to Q \to R \to 0$ una successione esatta di A-moduli, con R piatto. Dimostrare che per ogni A-modulo M la successione $0 \to P \otimes M \to Q \otimes M \to R \otimes M \to 0$ è esatta.

Suggerimento: tensorizzare la successione esatta corta per una successione esatta corta $0 \to N \to F \to M \to 0$, con F modulo piatto (ad esempio F libero o proiettivo) ed usare la caccia al diagramma.