Dipartimento di Matematica “G. Castelnuovo”, “Sapienza” Università di Roma

Geometria 2

a.a. 2017/2018

Esame scritto 5.9.2018

Tempo a disposizione: 2 ore

Esercizio 1. Sia X un insieme infinito, e $\mathcal{T}$ una topologia su X per cui tutti i sottoinsiemi infiniti di X sono aperti. Dimostrare che $\mathcal{T}$ è la topologia discreta.

(Può essere utile risolvere prima l'esercizio nel caso in cui X è numerabile e poi ricordare che ogni insieme infinito contiene un sottoinsieme numerabile.)

Esercizio 2. Sia X uno spazio topologico, e per ogni sottoinsieme $A \subset X$ si definiscano $\alpha(A) = (\overline{A})^\circ$ e $\beta(A) = \overline{(A^\circ)}$. Si dimostri che

(1) se A è aperto, allora $A \subset \alpha(A)$,
(2) se A è chiuso, allora $A \supset \beta(A)$.

Se ne deduca che $\alpha(\alpha(A)) = \alpha(A)$, e che $\beta(\beta(A)) = \beta(A)$ per ogni sottoinsieme $A \subset X$.

Esercizio 3. Sia $G = \{\mathrm{id}_D, \sigma\}$ il sottogruppo di omeomorfismi del disco unitario

$$D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 1\}$$

in se stesso, dove $\sigma\colon D \to D$ è definita come $\sigma(z) = -z$ per ogni $z \in D$. Si dimostri che esiste un omeomorfismo $f\colon D/G \to D$.

Esercizio 4. Sia X uno spazio topologico. Dati $x, y \in X$, definiamo $x \sim y$ se e solo se $\overline{\{x\}} = \overline{\{y\}}$.

(1) Si dimostri che $\sim$ è una relazione d'equivalenza.
(2) Dati $x, y \in X$ tali che $x \sim y$, e dato $A \subset X$ un aperto, si dimostri che $x \in A$ se e solo se $y \in A$.
(3) Si dimostri che lo spazio quoziente $X' = X/\sim$ è uno *spazio* T_0, cioè dati due punti distinti qualsiasi $p, q \in X'$ esiste un intorno di p non contenente q, oppure un intorno di q non contenente p.