

0.1. Per il 28 marzo.

Esercizio 1. Sia \mathcal{B} la famiglia di tutti gli intervalli del tipo $] - q, q[$, al variare di $q \in \mathbb{Q}$.

- (1) Dimostrare che \mathcal{B} è base per una topologia \mathcal{T} su \mathbb{R} e descrivere tutti gli aperti;
- (2) Determinare le parti interne degli intervalli $] - \infty, -1]$ e $[-5, 2]$ nella topologia \mathcal{T} ;
- (3) Determinare le chiusure di $] - \infty, -1]$, di $\{0\}$ e di $\{1\}$ nella topologia \mathcal{T} ;
- (4) Dimostrare che $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ è connesso ma non è compatto, né di Hausdorff.

Esercizio 2. Dimostrare che intersezione finita di aperti densi è ancora un aperto denso.

Esercizio 3. Sia $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow D^2 = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\| \leq 1\}$ l'applicazione continua definita nel modo seguente:

- (1) $f(x) = x$ se $\|x\| \leq 1$,
- (2) $f(x) = x/\|x\|$ se $\|x\| \geq 1$.

Dire, motivando la risposta, se f è aperta, se è chiusa e se è un'identificazione.

Esercizio 4. Sia $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ continua e tale che $f(x+1, y+2) = f(x-1, y+1) = f(x, y)$ per ogni $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Dimostrare che f possiede massimo e minimo.

0.2. Per le vacanze.

Esercizio 5. Sia \mathcal{T} la famiglia dei sottoinsiemi di \mathbb{R} che sono simmetrici rispetto allo 0, ossia $A \in \mathcal{T}$ se e solo se $A = -A = \{-x \mid x \in A\}$. Dimostrare che:

- (1) \mathcal{T} sono gli aperti di una topologia su \mathbb{R} ;
- (2) $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ non è né connesso, né compatto, né di Hausdorff;
- (3) l'applicazione $f: (\mathbb{R}, \mathcal{T}) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{T})$, $f(x) = x - 3$, non è continua;
- (4) l'applicazione $f: (\mathbb{R}, \mathcal{T}) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{T})$, $f(x) = 3x$, è continua;
- (5) (non banale) esiste uno spazio di Hausdorff X ed una identificazione $p: (\mathbb{R}, \mathcal{T}) \rightarrow X$ che gode della seguente proprietà universale: data comunque un'applicazione continua $f: (\mathbb{R}, \mathcal{T}) \rightarrow Y$, con Y spazio di Hausdorff, esiste un'applicazione continua $g: X \rightarrow Y$ tale che $f = gp$.

Esercizio 6. Sia m il valore minimo di una funzione continua $f: [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ e si assuma $m > 1$. Descrivere esplicitamente un omeomorfismo h tra il quadrato $[0, 2] \times [0, 2]$ e l'insieme

$$X = \{(x, y) \in [0, 2] \times \mathbb{R} \mid 0 \leq y \leq f(x)\}$$

tale che $h(1, 1) = (1, 1)$.

Esercizio 7. Si consideri una successione di 3 applicazioni continue:

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \xrightarrow{h} D.$$

Dimostrare che se gf e hg sono omeomorfismi, allora f, g, h sono omeomorfismi.

Esercizio 8. Sia $X \subset \mathbb{R}^2$ un sottospazio compatto e sia $Y \subset \mathbb{R}^2$ il sottospazio ottenuto da X aggiungendo tutti i segmenti che uniscono tutte le coppie di punti $p, q \in X$ tali che $\|p\| = \|q\|$. Dimostrare che Y è compatto.

Esercizio 9. Sia X il quoziente di $\mathbb{R}^3 - \{0\}$ per la relazione di equivalenza $x \sim y$ se esiste $n \in \mathbb{Z}$ tale che $x = 2^n y$. Dimostrare che X è connesso e compatto e che esiste un'applicazione continua e surgettiva $X \rightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$. Dimostrare inoltre che X è omeomorfo a $S^2 \times S^1$.

Esercizio 10. Definiamo i seguenti sottoinsiemi di \mathbb{R}^n :

$$X = \{(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n \mid \text{esiste } s \in \mathbb{R} \text{ tale che } s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_n = 0\},$$

e per ogni $r > 0$ sia $A_r = \{(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n \mid \sum |a_i| \leq r\}$. Dimostrare:

- (1) A_r è chiuso per ogni r ;
- (2) A_1, A_2, \dots è un *ricoprimento fondamentale* di \mathbb{R}^n , cioè un sottoinsieme $U \subset \mathbb{R}^n$ è aperto se e solo se $U \cap A_i$ è aperto in A_i per ogni i ;
- (3) (non banale) $A_1 \cap X$ è chiuso;
- (4) X è chiuso.