Esercizi pasquali 2017

**Esercizio 1.** Sia $X$ lo spazio topologico quoziente di $\mathbb{C} - \{0\}$ per la relazione di equivalenza $x \sim y$ se $x^7 = y^7$. Dire, motivando la risposta se $X$ è di Hausdorff.

**Esercizio 2.** Sia $X$ uno spazio topologico e sia $f_i \colon X \to \mathbb{R}$, $i \in \mathbb{N}$, una successione di applicazioni continue tali che per ogni sottoinsieme compatto $Y \subset X$ esiste un intero $N > 0$ tale che $f_1 + \cdots + f_n \colon Y \to \mathbb{R}$ è iniettiva. Dimostrare che $X$ è di Hausdorff.

**Esercizio 3.** Descrivere esplicitamente un'applicazione $f \colon \mathbb{Z}^4 \to S^2$ la cui immagine è densa.

**Esercizio 4.** Siano $G$ un gruppo abeliano ed $0 \neq H \subseteq G$ un sottogruppo non banale. Diremo che un sottogruppo non banale $0 \neq F \subseteq G$ è una *estensione essenziale* di $H$ se per ogni sottogruppo non banale $0 \neq K \subseteq F$ si ha $H \cap K \neq 0$. Dimostrare che l'insieme delle estensioni essenziali di $H$ possiede elementi massimali rispetto all'inclusione.

**Esercizio 5.** Sia $a$ un numero reale fissato e sia $X$ il quoziente di $\mathbb{R}^2$ per la relazione di equivalenza $(x_1, y_1) \sim (x_2, y_2)$ se $x_1 - x_2 = a(y_1 - y_2)$. Dopo aver verificato che $\sim$ è una relazione di equivalenza, dimostrare che $X$ è uno spazio localmente compatto a base numerabile.

**Esercizio 6.** Dimostrare che ogni retratto di uno spazio contrattile è contrattile.

**Esercizio 7.** Dimostrare che il sottoinsieme $X \subset \mathbb{R}^n$ formato dalle $n$-uple $(a_1, \ldots, a_n)$ tali che il polinomio $t^n + a_1 t^{n-1} + \cdots + a_n$ possiede due radici $\alpha, \beta$ tali che $|\alpha - \beta| \geq 3$, è chiuso in $\mathbb{R}^n$.

**Esercizio 8.** Dimostrare che il sottospazio di $\mathbb{R}^3$ definito come

$$\{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 = z^2\} \cup \{(t, 0, 1) \mid -1 \leq t \leq 1\}$$

possiede un retratto per deformazione omeomorfo alla circonferenza $S^1$.

**Esercizio 9.** Dimostrare che l'unione delle immagini delle due applicazioni

$$f, g \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, \qquad f(t) = (\cos(t), \sin(t)), \quad g(t) = (1 + e^t) f(t),$$

è connesso ma non è connesso per archi.

**Esercizio 10.** Trovare una distanza sull'insieme

$$X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |y| < e^x\}$$

che induce la topologia Euclidea e che rende $X$ uno spazio metrico completo.

**Esercizio 11.** Sia $X \subset \mathbb{R}^2$ un sottospazio compatto e sia $Y \subset \mathbb{R}^2$ il sottospazio ottenuto da $X$ aggiungendo i segmenti che uniscono tutte le coppie di punti $p, q \in X$ tali che $\|p - q\| \geq 1$. Dimostrare che $Y$ è compatto.

**Esercizio 12.** Sia $U(1)$ il gruppo topologico moltiplicativo dei numeri complessi di norma 1 e sia $f \colon U(1) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ un'azione continua di $U(1)$ su $\mathbb{R}$. Dimostrare che $f(z, x) = x$ per ogni $(z, x) \in U(1) \times \mathbb{R}$ (suggerimento: non esistono applicazioni continue ed iniettive $U(1) \to \mathbb{R}$).

**Esercizio 13.** In topologia, con il termine *cilindro* di un'applicazione continua $f \colon X \to Y$ si intende la costruzione canonica di una fattorizzazione di $f$ come composizione di un'applicazione iniettiva e di un'equivalenza omotopica (ossia, tutte le applicazioni continue sono iniettive a meno di omotopia). In dettaglio, si definisce

$$Z = \frac{Y \cup (X \times [0, 1])}{\sim}$$

dove $\sim$ è la relazione di equivalenza generata da $f(x) \sim (x, 0)$, $x \in X$. Denotiamo con $\pi \colon Y \cup (X \times [0, 1]) \to Z$ la proiezione al quoziente, con $j \colon X \to Z$ la composizione di $\pi$ con l'applicazione $x \mapsto (x, 1)$ e con $p \colon Z \to Y$ la fattorizzazione al quoziente dell'applicazione

$$Y \cup (X \times [0, 1]) \to Y, \qquad y \mapsto y, \quad (x, t) \mapsto f(x), \quad x \in X, \ y \in Y.$$

Dimostrare che $j$ è iniettiva e che $p$ è un'equivalenza omotopica.