Dipartimento di Matematica "G. Castelnuovo", "Sapienza" Università di Roma

Geometria 2

a.a. 2017/2018

esercizi del 23.5.2018

Esercizio 1. Sia $f\colon \mathbb{R}\times\mathbb{N}\to\mathbb{C}$ l'applicazione

$$f(t,n)=(n+e^t)(1+in)\,.$$

Dire, motivando la risposta, se il complementare in $\mathbb{C}$ dell'immagine di f è contrattile.

Esercizio 2. Calcolare i gruppi fondamentali di

$$A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\mid xy(x+y-1)=0\},\qquad B=\{(x,y,z)\in[0,1]^3\mid x+y+z=1;\ xyz=0\},$$
$$X=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\mid x^6+y^6+z^6=1\},\quad Y=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\mid xyz(x^2+y^2+z^2-1)=0\}$$

Esercizio 3. Siano $S^2=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\mid x^2+y^2+z^2=1\}$ la sfera unitaria e $N=(1,0,0)$ il "polo nord". Scrivere esplicitamente un'omotopia di cammini (con punto base N) tra i due cammini:

$$\alpha(t)=(\cos(2\pi t),\sin(2\pi t),0),\qquad \beta(t)=(1,0,0),\qquad t\in[0,1]\,.$$

Esercizio 4. Sia $f\colon [0,+\infty[\,\to\mathbb{C}$ l'applicazione $f(t)=te^{it}$ e sia $X\subset\mathbb{C}$ l'immagine di f. Calcolare i gruppi fondamentali di X e $\mathbb{C}-X$.

Esercizio 5. Sia $p\colon E\to X$ un rivestimento con E connesso per archi e sia $Y\subset X$ un sottospazio connesso per archi. Dato $a\in Y$, provare che se l'omomorfismo di gruppi $\pi_1(Y,a)\to\pi_1(X,a)$ indotto dall'inclusione è surgettivo, allora $p^{-1}(Y)$ è connesso per archi.

Vale il viceversa assumendo $\pi_1(E)=0$? Vale il viceversa in generale?

Esercizio 6. Dato $a\in\mathbb{R}$, sia $G\subset GL(2,\mathbb{R})$ il sottogruppo generato dalla matrice

$$\begin{pmatrix}2 & a\\ 0 & 2\end{pmatrix}$$

Per quali valori di a tale gruppo agisce in modo propriamente discontinuo su $\mathbb{R}^2-\{0\}$?