Corso di Laurea in Matematica, Sapienza Università di Roma

Esonero di Geometria II, 2 maggio 2014

Il primo esercizio vale 2 punti, i rimanenti esercizi valgono 6 punti ciascuno.

Esercizio 1. Scrivere in maniera chiara e leggibile il proprio nome e cognome in ciascun foglio consegnato.

Esercizio 2. Dire, motivando la risposta, quante sono le componenti connesse di

$$X = \{a + ib \in \mathbb{C} \mid b^2 - a^2 > 0\} .$$

Esercizio 3. Dimostrare che

$$GL(n, \mathbb{R}) = \{A \in M_{n,n}(\mathbb{R}) \mid \det(A) \neq 0\}$$

è un aperto denso nello spazio delle matrici $M_{n,n}(\mathbb{R})$ dotato della topologia classica.

Esercizio 4. Sia V uno spazio vettoriale reale. Diremo che un insieme $X \subset V$ è baricentrale se per ogni insieme finito di punti $p_1, \ldots, p_n \in X$ si ha

$$\frac{1}{n}(p_1 + p_2 + \cdots + p_n) \in X .$$

Sia $Y \subset V$ un sottoinsieme che contiene lo 0. Dimostrare che la famiglia dei sottoinsiemi di Y che sono baricentrali possiede elementi massimali rispetto all'inclusione.

Esercizio 5. Siano $f_1, \ldots, f_n \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^4$ applicazioni lineari. Dimostrare che lo spazio topologico

$$X = \mathbb{R}^4 - \bigcup_{i=1}^{n} f_i([0, +\infty[)$$

è semplicemente connesso. (*Nota: risolvere il problema per $n \leq 1$ vale 2 punti, risolvere il problema per $n \leq 2$ vale 4 punti.*)

Esercizio 6. Siano L, V due spazi topologici discreti (ossia dotati della topologia discreta) e siano $f, g \colon L \to V$ due applicazioni. Costruiamo lo spazio topologico

$$G = \frac{L \times [0,1] \cup V}{\sim}$$

dove $\sim$ è la più piccola relazione di equivalenza tale che

$$(x, 0) \sim f(x), \qquad (x, 1) \sim g(x) .$$

Dimostrare che G è di Hausdorff, che ogni punto di G è retratto per deformazione di un suo intorno e che G è localmente compatto se e solo se per ogni $v \in V$ gli insiemi $f^{-1}(v)$ e $g^{-1}(v)$ sono finiti.

Se avete risolto tutti gli esercizi e avete ancora tempo a disposizione potete dimostrare che, nelle notazioni dell'Esercizio 6, un sottoinsieme $C \subset G$ è chiuso se $C \cap K$ è chiuso in K per ogni compatto $K \subset G$.