Esonero di geometria 2, 20 aprile 2017

Il primo esercizio vale 7 punti. Agli esercizi dal 2 all'8 viene assegnato un punteggio compreso tra 0 e 4. Il punteggio finale è uguale al minimo tra 30 e la somma dei punteggi dei singoli esercizi.

Esercizio 1. Scrivere in maniera leggibile nome e cognome in ciascun foglio e registrarsi su infostud all'appello del 26 giugno entro le ore 23.59 di venerdì 21 aprile.

Esercizio 2. Siano X un insieme infinito di maritozzi e $U_n \subset X$, $n \in \mathbb{N}$, una famiglia numerabile di sottoinsiemi di X. Sia $\mathcal{F}$ la famiglia dei sottoinsiemi di X che intersecano ciascun U_n in al più un maritozzo. Dimostrare che $\mathcal{F}$ possiede elementi massimali rispetto all'inclusione.

Esercizio 3. Sia X il quoziente di $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ per la relazione di equivalenza $(x, y) \sim (u, v)$ se esiste una matrice ortogonale A tale che $Ax = u$, $Ay = v$. Dimostrare che X è uno spazio di Hausdorff. (Suggerimento: ricordare che il gruppo delle matrici ortogonali è compatto.)

Esercizio 4. Sia $S^8 \subset M_{3,3}(\mathbb{R})$ il sottoinsieme delle matrici i cui quadrati dei coefficienti hanno somma uguale ad 1 e sia $C \subset S^8$ il sottoinsieme di tali matrici che hanno determinante nullo. Dimostrare che C è un chiuso raro di S^8.

Esercizio 5. Sia S un insieme dotato della topologia discreta e si consideri il prodotto topologico $X = \prod_{i \in \mathbb{N}} S$ di una quantità numerabile infinita di copie di S. Identifichiamo X con l'insieme di tutte le applicazioni $f \colon \mathbb{N} \to S$, e denotiamo con $Y \subset X$ il sottospazio delle applicazioni f tali che $f(n) = f(n + 1)$ per qualche n. Dimostrare che Y è uno spazio di Baire.

Esercizio 6. Sia $X \subset M_{n,n}(\mathbb{R})$ il sottospazio delle matrici simmetriche A tali che

$$\|x\|^2 \leq x^T A x \leq 2\|x\|^2$$

per ogni $x \in \mathbb{R}^n$. Dimostrare che X è un chiuso contrattile di $M_{n,n}(\mathbb{R})$.

Esercizio 7. Per ogni spazio topologico X ed ogni numero reale t consideriamo le applicazioni continue

$$a_X, b_X \colon X \to X \times [0, 1], \qquad a_X(x) = (x, 0), \qquad b_X(x) = (x, 1)\,.$$

Siano **Top** la categoria degli spazi topologici, **C** una categoria qualunque e $F \colon \mathbf{Top} \to \mathbf{C}$ un funtore tale che, se $f \colon X \to Y$ è un'equivalenza omotopica, allora $F(f) \colon F(X) \to F(Y)$ è un isomorfismo. Dimostrare che $F(a_X) = F(b_X)$ per ogni spazio topologico X e dedurre che se $f, g \colon X \to Y$ sono applicazioni omotope, allora $F(f) = F(g)$.

Esercizio 8. Siano $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ la sfera unitaria e $f \colon S^2 \to \,]0, +\infty[$ un'applicazione continua. Dimostrare che i due sottoinsiemi di $\mathbb{R}^3 - \{0\}$:

$$X = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x \neq 0, \|x\| < f(x/\|x\|)\}, \qquad Y = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x \neq 0, \|x\| \leq f(x/\|x\|)\},$$

hanno lo stesso tipo di omotopia ma non sono omeomorfi.