Esercitazione di topologia, 28 marzo 2017

**Esercizio 1.** Siano $C_1, \dots, C_n$ sottospazi compatti disgiunti di uno spazio topologico $X$ localmente compatto di Hausdorff. Dimostrare che esistono aperti disgiunti $U_1, \dots, U_n$ tali che $C_i \subset U_i$ per ogni $i$.

**Esercizio 2.** Sia $A \subset \mathbb{R}^n$ un sottoinsieme compatto. Dimostrare che per ogni numero reale $r > 0$ il sottoinsieme
$$A(r) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \text{esiste } a \in A \text{ tale che } \|x - a\| = r\}$$
è compatto.

**Esercizio 3.** Sia $f : X \to Y$ continua e surgettiva. Se $X$ è uno spazio di Baire ed esiste un aperto denso $U \subset X$ tale che la restrizione $f : U \to Y$ è aperta, allora anche $Y$ è uno spazio di Baire.

**Esercizio 4.** Sia $G$ un gruppo. Dimostrare che la famiglia dei sottogruppi abeliani di $G$ possiede elementi massimali rispetto all'inclusione.

**Esercizio 5.** Sia $X$ uno spazio di Hausdorff. Provare che per ogni applicazione continua $f : X \to X$ l'insieme dei punti fissi $\{x \in X \mid f(x) = x\}$ è chiuso.

**Esercizio 6.** Sia $X$ uno spazio compatto di Hausdorff e sia $f : \mathbb{R} \times X \to X$ un'applicazione continua tale che:

(1) $f(0, x) = x$ per ogni $x \in X$;
(2) $f(t, f(s, x)) = f(t + s, x)$ per ogni $t, s \in \mathbb{R}$, $x \in X$;
(3) per ogni intero positivo $n$ esiste $x_n \in X$ tale che $f(\frac{1}{n}, x_n) = x_n$.

Dimostrare che esiste $x \in X$ tale che $f(t, x) = x$ per ogni $t \in \mathbb{R}$.

**Esercizio 7.** Sia $K \subset \mathbb{R}^n$ un sottospazio compatto e sia $X \subset M_{n,n}(\mathbb{R})$ il sottoinsieme delle matrici $A$ tali che $\text{Ker}(A) \cap K \neq \emptyset$ e $\text{Ker}(A^2 - I) \cap K \neq \emptyset$. Dimostrare che $X$ è chiuso in $M_{n,n}(\mathbb{R})$.

**Esercizio 8.** Sia $\{C_i\}$, $i \in I$, una famiglia di sottospazi disgiunti e non vuoti di $\mathbb{R}^n$. Dimostare che se per ogni indice $i \in I$ l'unione $\bigcup_{j \neq i} C_i$ è chiusa, allora l'insieme $I$ degli indici è al più numerabile.

**Esercizio 9.** Sia $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0 \text{ oppure } y = 0, x^2 < 1\}$. Dimostrare che $A$ non è omeomorfo a $\mathbb{R}^2 - A$.

**Esercizio 10.** Per ogni $n > 0$ sia $X_n \subset \mathbb{R}^2$ l'unione della circonferenza $S^1$ e di $n$ rette distinte passanti per l'origine. Dimostrare che $X_n$ è omeomorfo a $X_m$ solo se $n = m$.