1 Esercizi di Geometria II, 28 marzo 2014

1.1 Lemma di Zorn

Esercizio 1. Sia X un sottoinsieme di uno spazio vettoriale V che contiene il vettore nullo e sia S la famiglia dei sottospazi vettoriali di V che sono contenuti in X. Dimostrare che S, con l'ordinamento dato dall'inclusione, possiede elementi massimali.

Esercizio 2. Siano A un anello commutativo ed $a \in A$ tale che $a^n \neq 0$ per ogni intero $n > 0$. Dimostrare che la famiglia $\mathcal{F}$ degli ideali $I \subset A$ tali che $a^n \notin I$ per ogni intero $n > 0$, ordinata per inclusione è non vuota e possiede elementi massimali. Dimostrare inoltre che ogni elemento massimale di $\mathcal{F}$ è un ideale primo.

Esercizio 3. (difficile) Sia $U(1)$ il gruppo (moltiplicativo) dei numeri complessi di modulo 1. Dato un gruppo abeliano G, un suo sottogruppo $H \subset G$ ed un omomorfismo di gruppi $f\colon H \to U(1)$, dimostrare che esiste un omomorfismo $g\colon G \to U(1)$ tale che $g_{|H} = f$. (suggerimento: considerare la famiglia delle coppie (K, u), con $H \subset K \subset G$ e $u\colon K \to U(1)$ che estende f. Ad un certo punto si dovrà usare il fatto che sui complessi esistono sempre le radici n-esime.)

1.2 Topologia

Esercizio 4. Sia X uno spazio topologico e $f\colon X \to \mathbb{R}^5$ continua ed iniettiva. Dimostrare che X è di Hausdorff.

Esercizio 5. Sia X uno spazio topologico. Una funzione $f\colon X \to \mathbb{R}$ si dice **localmente costante** se per ogni punto $x \in X$ esiste un intorno U di x tale che $f(y) = f(x)$ per ogni $y \in U$.
Provare che se X è connesso e $f\colon X \to \mathbb{R}$ è localmente costante, allora f è costante. (Sugg.: sia $x \in X$ e provare che $f^{-1}(f(x))$ è aperto e chiuso.)

Esercizio 6. Dimostrare che i quattro sottospazi di $\mathbb{R}^2$:

1. Una circonferenza.
2. Unione di due circonferenze disgiunte.
3. Unione di due circonferenze tangenti.
4. Unione di due circonferenze secanti.

hanno classi di omeomorfismo distinte.

Esercizio 7. Siano X uno spazio topologico e $f\colon \mathbb{R} \to X$ un'applicazione continua, iniettiva e chiusa. Dimostrare che X non è compatto.

Esercizio 8. Sia C un chiuso di uno spazio topologico X. Provare che C è raro in X (cioè senza punti interni) se e solo se è la frontiera di un aperto di X.

Esercizio 9. Sia $X \subset M_{n,n}(\mathbb{R})$ il sottospazio vettoriale delle matrici simmetriche $n \times n$ e denotiamo con $U \subset X$ l'insieme delle matrici definite positive. Dimostrare che U è aperto in X.

Esercizio 10. Siano X uno spazio compatto di Hausdorff e $C_0 \supset C_1 \supset \cdots C_n \supset \cdots$ una catena discendente di chiusi di X.

1. Dimostrare che per ogni aperto $U \subset X$ tale che $\cap_{n=0}^{+\infty} C_n \subset U$, vale $C_n \subset U$ per $n >> 0$.
2. Provare che se ogni C_n è connesso, allora anche $\cap_{n=0}^{+\infty} C_n$ è connesso (suggerimento: se $\cap_{n=0}^{+\infty} C_n$ è unione di due chiusi disgiunti applicare Wallace)

Esercizio 11. Sia $A \subset \mathbb{R}^2$ un sottoinsieme connesso per archi e denotiamo con $B \subset \mathbb{R}^2$ l'unione di tutti i segmenti con estremi in A. Dimostrare che B è convesso.

Esercizio 12. Sia $X = \mathbb{Q}^n \cup (\mathbb{R} - \mathbb{Q})^n \subset \mathbb{R}^n$. Dimostrare che X è connesso.