L'ATLANTE DI CAYLEY SU $SO(n,\mathbb{R})$

Sia $\mathbb{K}$ un campo di caratteristica diversa da 2. Date due matrici $A,B\in M_{n,n}(\mathbb{K})$ tali che $AB=BA$, se B è invertibile allora

$$AB^{-1}=B^{-1}BAB^{-1}=B^{-1}ABB^{-1}=B^{-1}A\,,$$

e quindi risulta ben definito il "quoziente" $\dfrac{A}{B}$. Ponendo

$$U=\{A\in M_{n,n}(\mathbb{K})\mid \det(I+A)\neq 0\}$$

è ben definita l'applicazione, detta **trasformata di Cayley**:

$$\phi\colon U\to M_{n,n}(\mathbb{K}),\qquad \phi(A)=\frac{I-A}{I+A}\,.$$

Teorema 1. *Nelle notazioni precedenti si ha:*

(1) $\phi(A)\in U$ *e* $\phi^2(A)=A$ *per ogni* $A\in U$*;*
(2) $A+A^T=0$ *se e solo se* $\phi(A)\phi(A)^T=I$ *e* $\det\phi(A)=1$.

Dimostrazione. Se $A\in U$ allora

$$\det(I+\phi(A))=\det\left(\frac{2I}{I+A}\right)=\frac{2^n}{\det(I+A)}\neq 0$$

e quindi $\phi(A)\in U$. La prova che $\phi^2(A)=A$ è del tutto elementare.

Se $A\in U$ è antisimmetrica, allora $I-A=(I+A)^T$, le matrici $I+A$ e $I-A$ hanno lo stesso determinante e quindi $\det\phi(A)=1$. Inoltre, siccome la trasposta dell'inversa è uguale all'inversa della trasposta si ha:

$$\phi(A)\phi(A)^T=\frac{I-A}{I+A}\,\frac{I+A}{I-A}=I\,.$$

Viceversa, se $B\in U$ e $BB^T=I$, si ha

$$\phi(B)+\phi(B)^T=\frac{I-B}{I+B}+\frac{I-B^T}{I+B^T}=\frac{I-BB^T}{2I+B+B^T}=0\,.$$

Dunque $\phi(B)$ è antisimmetrica e per i punti precedenti $B=\phi^2(B)$ ha determinante 1. Notiamo che questo prova che se $BB^T=I$ e $\det(I+B)\neq 0$, allora $\det(B)=1$. $\square$

Supponiamo adesso $\mathbb{K}=R$, in tal caso U è un aperto di $M_{n,n}(\mathbb{R})$, la trasformata di Cayley è continua e quindi definisce un omemorfismo di U in sé. Indichiamo con V l'intersezione di U con il sottospazio vettoriale delle matrici antisimmetriche: dunque V è un aperto in uno spazio vettoriale di dimensione $n(n-1)/2$.

Per ogni matrice speciale ortogonale $B\in SO(n,\mathbb{R})$ possiamo definire un'applicazione continua

$$f_B\colon V\to SO(n,\mathbb{R}),\qquad f_B(A)=B\frac{I-A}{I+A},$$

che abbiamo visto essere un omeomorfismo sulla sua immagine che è esattamente l'aperto

$$f_B(V)=\{C\in SO(n,\mathbb{R})\mid \det(I+B^{-1}C)\neq 0\}\,.$$

Siccome $f_B(0)=B$, abbiamo definito un atlante su $SO(n,\mathbb{R})$ le cui carte sono $(f_B(V),V,f_B^{-1})$ al variare di $B\in SO(n,\mathbb{R})$.

Si tratta di un atlante differenziabile in quanto

$$f_B^{-1}(C)=\frac{I-B^{-1}C}{I+B^{-1}C}$$

e le applicazioni $f_B^{-1}f_C$ risultano analitiche, e quindi di classe C^∞, ove definite, per ogni $B,C\in SO(n,\mathbb{R})$.

Ne consegue che $SO(n,\mathbb{R})$ ha una struttura di varietà differenziabile di dimensione $n(n-1)/2$ rispetto alla quale l'inclusione $SO(n,\mathbb{R})\to M_{n,n}(\mathbb{R})$ è di classe C^∞.

Corso di Geometria 2, 2016-17, Sapienza Università di Roma.