MINITOPOLOGIA

MARCO MANETTI

Sommario. Minicorso di topologia generale orientato allo studio delle varietà differenziabili. Per approfondimenti e maggiori dettagli rimandiamo alla monografia [1].

Indice

Ultima revisione: 12 ottobre 2009.

1. Notazioni

Se X è un insieme scriveremo $x \in X$ se x appartiene a X, cioè se x è un elemento di X. Se A e B sono insiemi scriveremo $A \subset B$ se A è contenuto in B, ossia se ogni elemento di A è anche elemento di B. Scriveremo invece $A \subset B$, $A \neq B$, se A è contenuto strettamente in B. Denoteremo con

$$A - B = \{x \in A \mid x \notin B\}$$

l'insieme degli elementi di A che non appartengono a B. L'insieme vuoto è l'insieme che non contiene alcun elemento; si denota con $\emptyset$ ed è contenuto in ogni insieme. Se $x_1, \dots, x_n$ sono elementi di un insieme X denoteremo con $\{x_1, \dots, x_n\}$ il sottoinsieme di X i cui elementi sono esattamente $x_1, \dots, x_n$.

Scriveremo $f\colon X \to Y$ o $X \xrightarrow{f} Y$ per indicare che f è un'applicazione da X in Y e $x \mapsto y$ per indicare che $y = f(x)$. Per ogni sottoinsieme $A \subset Y$ denoteremo

$$f^{-1}(A) = \{x \in X \mid f(x) \in A\}.$$

I sottoinsiemi di X della forma $f^{-1}(A)$ si dicono **saturi** rispetto ad f. Se $A = \{y\}$ è formato da un solo punto, chiameremo $f^{-1}(\{y\})$ la **fibra** di f su y. Spesso, con un leggero abuso di notazione, denoteremo con $f^{-1}(y)$ la fibra su di un punto y. Se $f\colon X \to Y$ è un'applicazione di insiemi e A, B sono due sottoinsiemi di X, si verifica facilmente che $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$, mentre è generalmente falso che $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$.

Se $\mathcal{A}$ è una famiglia di sottoinsiemi di un insieme X, i simboli

$$\cup\{A \mid A \in \mathcal{A}\} \qquad \text{e} \qquad \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A$$

indicano l'unione degli elementi di $\mathcal{A}$. Notazioni analoghe, con il simbolo $\cap$ al posto di $\cup$, per l'intersezione.

Una **indicizzazione** della famiglia $\mathcal{A}$ è un'applicazione surgettiva $A\colon I \to \mathcal{A}$; l'insieme I è detto insieme degli **indici** e si scrive solitamente A_i in luogo di $A(i)$ e $\cup\{A_i \mid i \in I\}$ in luogo di $\cup\{A \mid A \in \mathcal{A}\}$. **Parametri** e **parametrizzazione** sono sinonimi rispettivamente di indici e indicizzazione.

Le **formule di De Morgan** sentenziano che il passaggio al complementare scambia i ruoli di unione e intersezione: questo significa che se $A, B \subset X$, allora

$$X - (A \cup B) = (X - A) \cap (X - B) \quad \text{e} \quad X - (A \cap B) = (X - A) \cup (X - B).$$

Questo è vero più in generale per ogni famiglia $\{A_i \mid i \in I\}$ di sottoinsiemi di X: in formule

$$X - \left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) = \bigcap_{i \in I} (X - A_i), \qquad X - \left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) = \bigcup_{i \in I} (X - A_i).$$

Il **prodotto cartesiano** di una famiglia finita $X_1, \dots, X_n$ di insiemi si denota con

$$X_1 \times \cdots \times X_n, \quad \text{oppure con} \quad \prod_{i=1}^{n} X_i,$$

ed è per definizione l'insieme delle n-uple $(x_1, \dots, x_n)$ con $x_i \in X_i$ per ogni i. Per ogni insieme X e per ogni $n \in \mathbb{N}$ denotiamo con X^n il prodotto cartesiano di X con sé stesso n volte.

Esercizio 1.1. Dimostrare che per ogni terna di insiemi A, B, C vale

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \quad \text{e} \quad A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

Esercizio 1.2. Mostrare che se $\{A_i \mid i \in I\}$ e $\{B_j \mid j \in J\}$ sono due famiglie qualsiasi di insiemi, allora valgono le formule

$$\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) \cap \left(\bigcup_{j\in J} B_j\right) = \bigcup_{\substack{i\in I\\ j\in J}} (A_i \cap B_j) \quad \text{e} \quad \left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) \cup \left(\bigcap_{j\in J} B_j\right) = \bigcap_{\substack{i\in I\\ j\in J}} (A_i \cup B_j).$$

Esercizio 1.3. Sia $f\colon X \to Y$ un'applicazione e siano A, B sottoinsiemi di X. Dire quali delle seguenti affermazioni sono sempre vere e quali no. Nel secondo caso introdurre ipotesi aggiuntive su f affinché diventino vere.

(1) $f(A \cap B) \supset f(A) \cap f(B)$.
(2) $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$
(3) $f(X - A) = Y - f(A)$.
(4) $f(X - A) \supset Y - f(A)$.
(5) $f^{-1}(f(A))) = A$.

2. Relazioni di equivalenza e di ordine

Una **relazione** in un insieme X è un qualsiasi sottoinsieme $\mathfrak{R} \subset X \times X$. È consuetudine scrivere $x\mathfrak{R}y$ se e solo se $(x, y) \in \mathfrak{R}$.

Una **relazione di equivalenza** su di un insieme X è una relazione $\sim$ che soddisfa le proprietà:

Riflessiva: $x \sim x$ per ogni $x \in X$.
Simmetrica: se $x \sim y$, allora $y \sim x$.
Transitiva: se $x \sim y$ e $y \sim z$, allora $x \sim z$.

Sia $\sim$ una relazione di equivalenza su un insieme X, la **classe di equivalenza di** $x \in X$ è l'insieme

$$[x] = \{y \in X \mid x \sim y\}.$$

Le classi di equivalenza determinano univocamente la relazione di equivalenza e le tre proprietà precedenti diventano:

Riflessiva: $x \in [x]$ per ogni $x \in X$.
Simmetrica: se $x \in [y]$, allora $y \in [x]$.
Transitiva: se $x \in [y]$ e $y \in [z]$, allora $x \in [z]$.

Si dimostra facilmente che se $[x] \cap [y] \neq \emptyset$ allora $x \sim y$ e $[x] = [y]$. L'insieme delle classi di equivalenza $X/\!\sim\, = \{[x] \mid x \in X\}$ viene detto **quoziente** di X per la relazione $\sim$. È ben definita un'applicazione

$$\pi\colon X \to X/\!\sim, \qquad \pi(x) = [x],$$

detta **proiezione al quoziente**. Per l'assioma della scelta esiste un'applicazione $f\colon X/\!\sim\, \to X$ tale che $f([x]) \in [x]$ per ogni classe di equivalenza. In altri termini l'immagine di f è quello che viene detto **insieme di rappresentanti**, ossia un sottoinsieme $S \subset X$ che interseca ogni classe di equivalenza in uno ed un solo elemento.

Esempio 2.1. Sull'insieme $\mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$ dei vettori non nulli a $n+1$ dimensioni definiamo $x \sim y$ se esiste $t \in \mathbb{R} - \{0\}$ tale che $x = ty$. È immediato osservare che $\sim$ è una relazione di equivalenza; l'insieme quoziente $\mathbb{P}^n(\mathbb{R}) = (\mathbb{R}^{n+1} - \{0\})/\!\sim$ è per definizione lo **spazio proiettivo** reale di dimensione n. Sostituendo $\mathbb{R}$ con $\mathbb{C}$ nella precedente definizione si ottengono gli spazi proiettivi complessi $\mathbb{P}^n(\mathbb{C}) = (\mathbb{C}^{n+1} - \{0\})/\!\sim$.

Lemma 2.2. *Siano $\sim$ una relazione di equivalenza su X, $\pi\colon X \to X/\!\sim$ la proiezione al quoziente e $f\colon X \to Y$ un'applicazione. Sono fatti equivalenti:*

(1) *L'applicazione f è costante sulle classi di equivalenza, ossia vale $f(x) = f(y)$ ogniqualvolta $x \sim y$.*
(2) *Esiste $g\colon X/\!\sim \to Y$ tale che $f = g\pi$.*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi"'] & Y \\ X/\!\sim \arrow[ur, dashed, "g"'] & \end{tikzcd}$$

Dimostrazione. Lasciata per esercizio. □

Un **ordinamento** in un insieme X è una relazione $\leq$ che soddisfa le tre proprietà:

Riflessiva: $x \leq x$ per ogni $x \in X$.
Antisimmetrica: se $x \leq y$ e $y \leq x$, allora $x = y$.
Transitiva: se $x \leq y$ e $y \leq z$, allora $x \leq z$.

Un ordinamento viene anche detto una **relazione d'ordine**. Se $\leq$ è un ordinamento si definisce $x < y$ se $x \leq y$ e $x \neq y$.

Un ordinamento su X si dice **totale** se per ogni $x, y \in X$ vale $x \leq y$ oppure $y \leq x$. Un **insieme ordinato** è un insieme dotato di un ordinamento; un **insieme totalmente ordinato** è un insieme dotato di un ordinamento totale[a].

Ogni sottoinsieme di un insieme ordinato è a sua volta un insieme ordinato, con la relazione di ordine indotta.

Definizione 2.3. Sia $(X, \leq)$ un insieme ordinato. Diremo che $m \in X$ è un **elemento massimale** di X se non esistono elementi $x \in X$ tali che $m < x$, ossia se $\{x \in X \mid m \leq x\} = \{m\}$.

3. Spazi topologici

Definizione 3.1. Sia X un insieme, una **topologia** su X è una famiglia $\mathcal{T}$ di sottoinsiemi di X, detti **aperti**, che soddisfa le seguenti condizioni:

A1: $\emptyset$ e X sono aperti.
A2: Unione arbitraria di aperti è un sottoinsieme aperto.
A3: Intersezione di due aperti è un sottoinsieme aperto.

Un insieme dotato di una topologia viene detto **spazio topologico**. Gli elementi di uno spazio topologico vengono detti **punti**.

[a]Questa definizione non è universalmente accettata: alcuni chiamano ordinamenti gli ordinamenti totali e ordinamenti parziali gli ordinamenti.

Osserviamo che la condizione A3 implica che ogni intersezione finita di aperti è ancora un sottoinsieme aperto: infatti se $A_1, \dots, A_n$ sono aperti si può scrivere $A_1 \cap \dots \cap A_n = (A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}) \cap A_n$. Per induzione su n si ha che $A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}$ è aperto e quindi per A3 anche $A_1 \cap \dots \cap A_n$ è aperto.

Ogni insieme possiede topologie. Ad esempio la famiglia $\mathcal{T} = \mathcal{P}(X)$ di tutti i sottoinsiemi di X è una topologia che viene detta **discreta**, mentre la famiglia $\mathcal{T}$ formata dal solo insieme vuoto e da tutto X è anch'essa una topologia, detta **indiscreta**.

Esempio 3.2. Nella **topologia euclidea** su $\mathbb{R}$, un sottoinsieme $U \subset \mathbb{R}$ è aperto se e solo se è unione di intervalli aperti.

Definizione 3.3. Sia X uno spazio topologico. Un sottoinsieme $C \subset X$ si dice **chiuso** se $X - C$ è aperto.

Poiché il passaggio al complementare scambia unioni con intersezioni, i chiusi di una topologia su X soddisfano le condizioni:

C1: $\emptyset$ e X sono chiusi.
C2: Intersezione arbitraria di chiusi è un sottoinsieme chiuso.
C3: Unione di due chiusi è un sottoinsieme chiuso.

Come nel caso degli aperti, la condizione C3 implica che ogni unione finita di chiusi è un sottoinsieme chiuso.

Definizione 3.4. Sia $\mathcal{T}$ una topologia su un insieme X. Una sottofamiglia $\mathcal{B} \subset \mathcal{T}$ si dice una **base** della topologia se ogni aperto $A \in \mathcal{T}$ può essere scritto come unione di elementi di $\mathcal{B}$.

Esempio 3.5. Gli intervalli aperti $]a, b[$ sono una base della topologia euclidea sulla retta reale.

Una base determina univocamente la topologia; d'altra parte non tutte le famiglie di sottoinsiemi di X sono basi di una topologia.

Teorema 3.6. *Siano X un insieme e $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(X)$ una famiglia di suoi sottoinsiemi. Allora $\mathcal{B}$ è base di una topologia su X se e soltanto se soddisfa le seguenti due condizioni:*

1. $X = \cup\{B \mid B \in \mathcal{B}\}$.
2. *Per ogni $A, B \in \mathcal{B}$ e per ogni $x \in A \cap B$ esiste $C \in \mathcal{B}$ tale che $x \in C \subset A \cap B$.*

Dimostrazione. La necessità delle due condizioni è chiara, vediamo la sufficienza. Definiamo gli aperti come unioni qualsiasi di elementi di $\mathcal{B}$; allora sono aperti X (unione completa) e l'insieme vuoto (unione vuota), mentre unione di aperti è chiaramente un aperto. Notiamo che la seconda condizione implica che per ogni $A, B \in \mathcal{B}$ vale

$$A \cap B = \cup\{C \mid C \in \mathcal{B},\, C \subset A \cap B\}.$$

Se $U = \cup A_i$ e $V = \cup B_j$ sono unioni arbitrarie di elementi della base $A_i, B_j \in \mathcal{B}$, per le formule di De Morgan,

$$U \cap V = \cup_{i,j}(A_i \cap B_j) = \cup\{C \mid C \in \mathcal{B} \text{ ed esistono } i, j \text{ tali che } C \subset A_i \cap B_j\}.$$

□

Esiste una naturale relazione d'ordine tra le topologie su di un insieme X.

Definizione 3.7. Date due topologie $\mathcal{T}$ e $\mathcal{R}$ su X, diremo che $\mathcal{T}$ è **più fine** di $\mathcal{R}$ (e di conseguenza che $\mathcal{R}$ è **meno fine** di $\mathcal{T}$) se $\mathcal{R} \subset \mathcal{T}$, cioè se ogni aperto della topologia $\mathcal{R}$ è aperto anche in $\mathcal{T}$.

Data una collezione arbitraria $\{\mathcal{T}_i\}$ di topologie su di un insieme X, la loro intersezione $\mathcal{T} = \cap_i \mathcal{T}_i$ è ancora una topologia. Se le $\mathcal{T}_i$ sono tutte e sole le topologie che contengono una data famiglia $\mathcal{S} \subset \mathcal{P}(X)$ di sottoinsiemi di X, allora $\mathcal{T}$ è la topologia meno fine tra quelle che contengono gli elementi di $\mathcal{S}$ come aperti.

Esempio 3.8. Sia $\{X_i \mid i \in I\}$ una collezione di spazi topologici, disgiunti due a due. Sulla loro unione $X = \cup_i X_i$ possiamo considerare la topologia meno fine tra quelle che contengono tutte le topologie degli spazi X_i. Lo spazio topologico così ottenuto viene detto **unione disgiunta** degli spazi X_i. Lasciamo per esercizio la verifica che un sottoinsieme $A \subset X$ è aperto se e solo se $A \cap X_i$ è aperto in X_i per ogni i.

Esercizio 3.9. Vero o falso?

(1) Su di un insieme formato da due punti esistono esattamente 4 strutture topologiche.
(2) In un insieme finito ogni topologia ha un numero pari di aperti.

Esercizio 3.10. Dimostrare che gli intervalli $[a, b] \subset \mathbb{R}$ sono chiusi nella topologia euclidea.

4. Parte interna, chiusura ed intorni

Definizione 4.1. Sia X uno spazio topologico e $B \subset X$. Si denota

(1) con B° l'unione di tutti gli aperti contenuti in B,
(2) con $\overline{B}$ l'intersezione di tutti i chiusi contenenti B,
(3) $\partial B = \overline{B} - B^\circ$.

L'insieme B° viene detto **parte interna** di B ed è il più grande aperto contenuto in B; i suoi punti si dicono **interni** a B. L'insieme $\overline{B}$ è il più piccolo chiuso contenente B e viene detto **chiusura** di B; i suoi punti sono detti **aderenti** a B. Il sottoinsieme ∂B è l'intersezione dei due chiusi $\overline{B}$ e $X - B^\circ$ e viene detto **frontiera** di B.

Si osservi che un sottoinsieme B è aperto se e solo se $B = B^\circ$, ed è chiuso se e solo se $B = \overline{B}$.

Definizione 4.2. Un sottoinsieme A di uno spazio topologico X di dice **denso** se $\overline{A} = X$ o, equivalentemente, se A interseca ogni aperto non vuoto di X.

Esempio 4.3.

- In uno spazio con la topologia indiscreta ogni sottoinsieme non vuoto è denso.
- In uno spazio con la topologia discreta nessun sottoinsieme proprio è denso.
- L'insieme dei numeri razionali è denso nello spazio $\mathbb{R}$ dotato della topologia euclidea.

Definizione 4.4. Siano X uno spazio topologico e $x \in X$ un suo punto. Un sottoinsieme $U \subset X$ si dice un **intorno di** x se x è un punto interno di U, cioè se esiste un aperto V tale che $x \in V$ e $V \subset U$.

Denotiamo con $I(x)$ la famiglia di tutti gli intorni di x. Per definizione, se A è un sottoinsieme di uno spazio topologico, allora $A^\circ = \{x \in A \mid A \in I(x)\}$; in particolare un sottoinsieme è aperto se e solo se è intorno di ogni suo punto.

Il passaggio al complementare permette di dare una utile caratterizzazione della chiusura di un sottoinsieme.

Lemma 4.5. *Sia A un sottoinsieme di uno spazio topologico X. Un punto $x \in X$ appartiene a $\overline{A}$ se e solo se per ogni intorno $U \in I(x)$ vale $U \cap A \neq \emptyset$.*

Dimostrazione. Per definizione $x \notin \overline{A}$ se e solo se x è interno a $X - A$, mentre x è interno a $X - A$ se e solo se esiste un intorno $U \in I(x)$ tale che $U \subset X - A$. □

Esiste per gli intorni l'analogo del concetto di base.

Definizione 4.6. Sia x un punto di uno spazio topologico X. Una sottofamiglia $\mathcal{I} \subset I(x)$ si dice una **base locale** oppure un **sistema fondamentale di intorni** di x, se per ogni $U \in I(x)$ esiste $A \in \mathcal{I}$ tale che $A \subset U$.

Esempio 4.7.
1) Sia $U \in I(x)$ un intorno fissato. Allora tutti gli intorni di x contenuti in U formano un sistema fondamentale di intorni di x.
2) Se $\mathcal{B}$ è una base della topologia, allora gli aperti di $\mathcal{B}$ che contengono x formano un sistema fondamentale di intorni di x.

Esercizio 4.8. Siano A, B sottoinsiemi di uno spazio topologico. Dimostrare che vale $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

Esercizio 4.9. Due sottoinsiemi A e B di uno spazio topologico X si dicono separati se $\overline{A} \cap B = A \cap \overline{B} = \emptyset$. Dimostrare che se $F, G \subset X$ sono entrambi aperti o entrambi chiusi, allora $A = F - G$ e $B = G - F$ sono separati.

Esercizio 4.10. Mostrare che nella retta reale $\mathbb{R}$ con la topologia euclidea, gli intervalli chiusi $[-2^{-n}, 2^{-n}]$, per $n \in \mathbb{N}$, sono un sistema fondamentale di intorni di 0.

Esercizio 4.11. Sia $\{U_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ un sistema fondamentale numerabile di intorni di un punto x in uno spazio topologico. Dimostrare che la famiglia

$$\{V_n = U_0 \cap \cdots \cap U_n \mid n \in \mathbb{N}\}$$

è ancora un sistema fondamentale di intorni di x.

5. Applicazioni continue

Definizione 5.1. Un'applicazione $f\colon X \to Y$ tra due spazi topologici si dice **continua** se, per ogni aperto $A \subset Y$ l'insieme

$$f^{-1}(A) = \{x \in X \mid f(x) \in A\}$$

è aperto in X.

Prima di proseguire, osserviamo che l'operatore $f^{-1}\colon \mathcal{P}(Y) \to \mathcal{P}(X)$ commuta con le operazioni di unione, intersezione e passaggio al complementare. In altri termini

$$f^{-1}(Y - A) = X - f^{-1}(A), \quad f^{-1}(\cup_i A_i) = \cup_i f^{-1}(A_i) \text{ e } f^{-1}(\cap_i A_i) = \cap_i f^{-1}(A_i).$$

Da ciò segue che:

(1) Un'applicazione $f\colon X \to Y$ è continua se e solo se, per ogni chiuso $C \subset Y$ l'insieme $f^{-1}(C)$ è chiuso in X (passaggio al complementare).
(2) Sia $\mathcal{B}$ una base della topologia di Y. Un'applicazione $f\colon X \to Y$ è continua se e solo se per ogni $B \in \mathcal{B}$ l'insieme $f^{-1}(B)$ è aperto in X (ogni aperto in Y è unione di elementi di $\mathcal{B}$).

Teorema 5.2. *Composizione di applicazioni continue è continua.*

Dimostrazione. Siano $f\colon X \to Y$ e $g\colon Y \to Z$ due applicazioni continue e sia $A \subset Z$ un aperto. Dalla continuità di g segue che $g^{-1}(A)$ è aperto e, dalla continuità di f segue che $f^{-1}\left(g^{-1}(A)\right)$ è aperto. Basta adesso osservare che $f^{-1}\left(g^{-1}(A)\right) = (gf)^{-1}(A)$. □

Definizione 5.3. Sia $f\colon X \to Y$ un'applicazione tra spazi topologici. Diremo che f è **continua in un punto** $x \in X$ se per ogni intorno U di $f(x)$ esiste un intorno V di x tale che $f(V) \subset U$.

Teorema 5.4. *Un'applicazione $f\colon X \to Y$ tra spazi topologici è continua se e solo se è continua in ogni punto di X.*

Dimostrazione. Supponiamo f continua e sia U un intorno di $f(x)$. Per definizione di intorno esiste un aperto $A \subset Y$ tale che $f(x) \in A \subset U$: l'aperto $V = f^{-1}(A)$ è un intorno di x e $f(V) \subset U$.

Viceversa, supponiamo f continua in ogni punto e sia A un aperto di Y, dobbiamo provare che $f^{-1}(A)$ è intorno di ogni suo punto. Se $x \in f^{-1}(A)$ allora A è un intorno di $f(x)$ ed esiste un intorno V di X tale che $f(V) \subset A$. Ciò equivale a dire $V \subset f^{-1}(A)$ e dunque $f^{-1}(A)$ è intorno di x. □

Definizione 5.5. Un **omeomorfismo** è un'applicazione continua e bigettiva con inversa continua. Diremo che due spazi topologici X e Y sono **omeomorfi** se esiste un omeomorfismo $f\colon X \to Y$.

Definizione 5.6. Un'applicazione $f\colon X \to Y$ tra due spazi topologici si dice:

(1) **aperta** se $f(A)$ è aperto in Y per ogni aperto A di X;
(2) **chiusa** se $f(C)$ è chiuso in Y per ogni chiuso C di X.

Lemma 5.7. *Sia $f\colon X \to Y$ un'applicazione continua tra due spazi topologici. Le seguenti condizioni sono equivalenti:*

(1) *f è un omeomorfismo.*
(2) *f è chiusa e bigettiva.*
(3) *f è aperta e bigettiva.*

Dimostrazione. [1 $\Rightarrow$ 2] Ogni omeomorfismo è bigettivo per definizione. Se $g\colon Y \to X$ è l'inversa di f, allora g è continua e per ogni sottoinsieme chiuso $C \subset X$, $f(C) = g^{-1}(C)$ è chiuso in Y.
[2 $\Rightarrow$ 3] Poiché f è bigettiva, per ogni sottoinsieme C di X si ha $f(X - C) = Y - f(C)$. Ogni aperto di X è della forma $X - C$ con C chiuso.
[3 $\Rightarrow$ 1] Se $g\colon Y \to X$ è l'inversa di f, allora per ogni sottoinsieme aperto $A \subset X$, $g^{-1}(A) = f(A)$ è aperto e quindi g è continua. □

Definizione 5.8. Un'applicazione continua $f\colon X \to Y$ si dice un **omeomorfismo locale** se per ogni $x \in X$ esistono due aperti $A \subset X$ e $B \subset Y$ tali che $x \in A$, $f(A) = B$ e la restrizione $f\colon A \to B$ è un omeomorfismo.

Ad esempio ogni applicazione continua, iniettiva ed aperta è un omeomorfismo locale.

Lemma 5.9. *Ogni omeomorfismo locale è un'applicazione aperta.*

Dimostrazione. Sia $f\colon X \to Y$ un omeomorfismo locale e sia $V \subset X$ un aperto. Vogliamo dimostrare che $f(V)$ è intorno di ogni suo punto, ossia che per ogni $y \in f(V)$ esiste un aperto $U \subset Y$ tale che $y \in U \subset f(V)$. Sia $x \in V$ tale che $f(x) = y$, per ipotesi esistono aperti $A \subset X$ e $B \subset Y$ tali che $x \in A$, $f(A) = B$ e la restrizione $f\colon A \to B$ è un omeomorfismo. In particolare $y \in f(V \cap A)$, $U = f(V \cap A)$ è aperto in B e quindi anche in Y. □

Con il termine funzione (reale) continua si intende un'applicazione $f\colon X \to \mathbb{R}$ che è continua rispetto alla topologia euclidea su $\mathbb{R}$.

Esercizio 5.10. Dimostrare che le applicazioni costanti sono continue, indipendentemente dalle topologie considerate.

Esercizio 5.11. Siano date due topologie $\mathcal{T}_1$ e $\mathcal{T}_2$ su di un insieme X. Mostrare che l'applicazione identica $(X, \mathcal{T}_1) \to (X, \mathcal{T}_2)$, $x \mapsto x$, è continua se e solo se $\mathcal{T}_1$ è più fine di $\mathcal{T}_2$.

Esercizio 5.12. Sia $f\colon X \to Y$ un'applicazione continua e $\mathcal{B}$ una base della topologia di X. Provare che f è aperta se e solo se $f(A)$ è aperto per ogni $A \in \mathcal{B}$.

Esercizio 5.13. Sia dato il seguente diagramma commutativo di applicazioni continue

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"] & Z \\ Y \arrow[ur, "h"'] & \end{tikzcd}$$

Dimostrare che se f è surgettiva e g è chiusa, allora anche h è chiusa.

6. Spazi metrici

Una **distanza** su di un insieme X è un'applicazione $d\colon X \times X \to \mathbb{R}$ che soddisfa le seguenti proprietà:

(1) $d(x, y) \geq 0$ per ogni $x, y \in X$ e vale $d(x, y) = 0$ se e solo se $x = y$.
(2) $d(x, y) = d(y, x)$ per ogni $x, y \in X$.
(3) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ per ogni $x, y, z \in X$.

La condizione 3 viene detta **disuguaglianza triangolare**.

Esempio 6.1. Su di un qualsiasi insieme X consideriamo la funzione delta di Kronecker $\delta\colon X \times X \to \{0, 1\}$,

$$\delta_{x,y} = \begin{cases} 1 & \text{se } x = y \\ 0 & \text{se } x \neq y \end{cases}$$

Allora la funzione $d(x, y) = 1 - \delta_{x,y}$ è una distanza.

Definizione 6.2. Uno **spazio metrico** è una coppia (X, d), dove X è un insieme e d è una distanza su X.

Esempio 6.3. La retta $\mathbb{R}$ con la distanza euclidea $d(x, y) = |x - y|$ è uno spazio metrico.

Esempio 6.4. Lo spazio $\mathbb{R}^n$, dotato della distanza euclidea

$$d(x,y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2}$$

è uno spazio metrico. L'unica verifica non banale è quella della disuguaglianza triangolare. Ricordiamo che il prodotto scalare canonico e la norma in $\mathbb{R}^n$ sono espressi dalle formule

$$(x \cdot y) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i, \qquad \|x\| = \sqrt{(x \cdot x)}$$

e quindi vale $d(x,y) = \|x - y\|$. Ponendo $x - z = u$ e $z - y = v$, la disuguaglianza triangolare per d è equivalente alla disuguaglianza $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$. Siccome $\|u + v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 + 2(u \cdot v)$, la disuguaglianza triangolare segue dalla disuguaglianza di Cauchy-Schwarz $(u \cdot v) \leq \|u\| \cdot \|v\|$.

Esempio 6.5. Estendendo l'identificazione $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ data dal piano di Gauss ai prodotti diretti $\mathbb{C}^n = \mathbb{R}^{2n}$, la distanza euclidea su $\mathbb{R}^{2n}$ si esprime nelle coordinate di $\mathbb{C}^n$ tramite la formula

$$d(x,y) = \sqrt{|x_1 - y_1|^2 + \cdots + |x_n - y_n|^2}, \quad x, y \in \mathbb{C}^n.$$

Chiameremo tale funzione $d\colon \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \to \mathbb{R}$ **distanza euclidea su $\mathbb{C}^n$**.

Esempio 6.6. Su $\mathbb{R}^n$ esistono altre interessanti distanze, come ad esempio

$$d_1(x,y) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i| \quad \text{e} \quad d_\infty(x,y) = \max_i\{|x_i - y_i|\}.$$

Se d indica la distanza euclidea si hanno le disuguaglianze

$$d_\infty(x,y) \leq d(x,y) \leq d_1(x,y) \leq n \cdot d_\infty(x,y).$$

L'unica non banale è $d(x,y) \leq d_1(x,y)$ che si ricava elevando al quadrato entrambi i membri.

Definizione 6.7. Sia d una distanza su un insieme X. Gli insiemi

$$B(x,r) = \{y \in X \mid d(x,y) < r\} \quad \text{e} \quad D(x,r) = \{y \in X \mid d(x,y) \leq r\}$$

si dicono rispettivamente **palla aperta** e **palla chiusa** di centro x e raggio r (rispetto alla distanza d).

Il nome "palla" è motivato dall'esempio della distanza euclidea. Le palle delle distanze dell'Esempio 6.6 sono in realtà degli ipercubi (per $n = 2$ sono palle quadrate).

Ogni distanza induce in modo naturale una struttura topologica.

Definizione 6.8 (Topologia indotta da una distanza)**.** Sia d una distanza su di un insieme X. Un sottoinsieme $A \subset X$ è aperto se per ogni $x \in A$ esiste $r > 0$ tale che $B(x,r) \subset A$.

Verifichiamo che la famiglia degli aperti definiti nella Definizione 6.8 soddisfa gli assiomi A1, A2 e A3. Se $A = \emptyset$ la condizione è verificata tautologicamente, mentre, poiché $x \in B(x,r)$ per ogni $r > 0$, si può scrivere $X = \cup_{x \in X} B(x,1)$. Se $A = \cup_i A_i$ con A_i aperto per ogni i e $x \in A$ esiste j tale che $x \in A_j$ e quindi $r > 0$ tale che $B(x,r) \subset A_j \subset A$. Se A, B sono aperti e $x \in A \cap B$ esistono $r, t > 0$ tali che $B(x,r) \subset A$, $B(x,t) \subset B$; se indichiamo con s il minimo tra r e t si ha $B(x,s) \subset A \cap B$.

Esempio 6.9. La **topologia classica** (detta anche **topologia euclidea**) sugli spazi $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{C}^n$ è per definizione la topologia indotta dalla distanza euclidea. A meno che non sia specificato diversamente, con i simboli $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{C}^n$ intenderemo i rispettivi insiemi dotati della topologia classica.

Lemma 6.10. *Nella topologia indotta da una distanza si ha:*
(1) *Le palle aperte sono sottoinsiemi aperti.*
(2) *Un sottoinsieme è aperto se e solo se è unione di palle aperte (e quindi le palle aperte sono una base della topologia).*
(3) *Un sottoinsieme U è un intorno di un punto x se e solo se contiene una palla aperta di centro x, cioè se e solo se esiste $r > 0$ tale che $B(x,r) \subset U$.*

Dimostrazione. [1] Se $y \in B(x,r)$ poniamo $s = r - d(x,y) > 0$; se $d(z,y) < s$ allora $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z) < r$ e quindi $B(y,s) \subset B(x,r)$.
[2] Dato che unione di aperti è ancora un aperto, l'implicazione "se" è dimostrata. Viceversa se A è un aperto possiamo scegliere per ogni $x \in A$ un numero reale $r(x) > 0$ tale che $B(x,r(x)) \subset A$ e quindi $A = \cup_{x\in A} B(x,r(x))$.
[3] Per definizione, U è un intorno di x se e solo se esiste un aperto A tale che $x \in A \subset U$. Se $B(x,r) \subset U$, poiché $B(x,r)$ è un aperto, si ha che U è un intorno. Viceversa se U è un intorno esiste un aperto A tale che $x \in A \subset U$ e quindi esiste $r > 0$ tale che $B(x,r) \subset A \subset U$. $\square$

Per gli spazi metrici ritroviamo la classica definizione di continuità data mediante la famigerata accoppiata epsilon-delta.

Proposizione 6.11. *Siano $f\colon (X,d) \to (Y,h)$ un'applicazione tra due spazi metrici ed x un punto di X. Allora f è continua in x se e solo se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un $\delta > 0$ tale che $h(f(x), f(y)) < \varepsilon$ ogniqualvolta $d(x,y) < \delta$.*

Dimostrazione. Continuità in x significa che per ogni intorno di $f(x)$ esiste un intorno U di x tale che $f(U) \subset V$. Basta adesso applicare la descrizione degli intorni in uno spazio metrico espressa nel Lemma 6.10. $\square$

Definizione 6.12. Due distanze su un insieme X si dicono **equivalenti** se inducono la stessa topologia. Uno spazio topologico X si dice **metrizzabile** se la topologia è indotta da una distanza opportuna.

Esempio 6.13. Se (X,h) e (Y,k) sono spazi metrici, allora le distanze

$$d_1, d_2, d_\infty\colon (X\times Y)\times(X\times Y) \to \mathbb{R},$$
$$d_1((x_1,y_1),(x_2,y_2)) = h(x_1,x_2) + k(y_1,y_2),$$
$$d_2((x_1,y_1),(x_2,y_2)) = \sqrt{h(x_1,x_2)^2 + k(y_1,y_2)^2},$$
$$d_\infty((x_1,y_1),(x_2,y_2)) = \max(h(x_1,x_2), k(y_1,y_2)),$$

inducono la stessa topologia su $X \times Y$, come segue facilmente dalle disuguaglianze $d_\infty \leq d_2 \leq d_1 \leq 2d_\infty$.

Esercizio 6.14. Mostrare che ogni insieme dotato della topologia discreta è metrizzabile.

Esercizio 6.15. Un sottoinsieme A di uno spazio metrico (X,d) si dice **limitato** se è contenuto in una palla di raggio $< +\infty$. Mostrare che la limitatezza non è una proprietà topologica, cioè che esistono coppie di distanze su un insieme X, che inducono la stessa topologia e tali che X è limitato per una distanza ed illimitato per l'altra.

Esercizio 6.16. Sia X un insieme finito, $Y = \mathcal{P}(X)$ la famiglia di tutti i sottoinsiemi di X e definiamo una funzione $d\colon Y \times Y \to \mathbb{R}$ mediante la formula

$$d(A, B) = |A| + |B| - 2|A \cap B| \qquad (|A| = \text{cardinalità di } A).$$

Dimostrare che d è una distanza su Y.

7. Sottospazi ed immersioni

Ogni sottoinsieme Y di uno spazio topologico X eredita in modo naturale una struttura topologica. Diremo che un sottoinsieme $U \subset Y$ è **aperto in** Y se esiste un aperto V di X tale che $U = Y \cap V$; è immediato verificare che gli aperti in Y soddisfano le condizioni A1, A2 ed A3 e quindi definiscono una topologia in Y che chiameremo **topologia di sottospazio**.

Chiameremo **sottospazio topologico** di X un sottoinsieme Y dotato della topologia degli aperti in Y. Poiché $Y - (V \cap Y) = Y \cap (X - V)$, ne segue che $C \subset Y$ è chiuso in Y se e solo se esiste un chiuso B di X tale che $C = Y \cap B$. Notiamo inoltre che se $\mathcal{B}$ è una base della topologia su X, allora $\{A \cap Y \mid A \in \mathcal{B}\}$ è una base della topologia indotta su Y.

Esempio 7.1. Se (X, d) è uno spazio metrico e $Y \subset X$, la restrizione di d a $Y \times Y$ induce una struttura di spazio metrico su Y la cui topologia indotta coincide con quella di sottospazio topologico.

L'applicazione $i\colon Y \to X$ di inclusione è continua, infatti per ogni aperto A di X vale $i^{-1}(A) = Y \cap A$ che, per definizione è aperto in Y. Inoltre la topologia di sottospazio è la meno fine tra tutte le topologie di Y che rendono continua l'inclusione.

Proposizione 7.2. *Siano X, Z spazi topologici, Y un sottospazio di X, $f\colon Z \to Y$ un'applicazione e $if\colon Z \to X$ la composizione di f con l'inclusione di Y in X. Se if è continua allora anche f è continua e viceversa.*

Dimostrazione. Se f è continua allora if è composizione di applicazioni continue e quindi continua. Viceversa, supponiamo if continua e sia $A \subset Y$ un aperto di Y. Esiste un aperto U di X tale che $A = Y \cap U$ e quindi $f^{-1}(A) = (if)^{-1}(U)$ è aperto in Z. □

Lemma 7.3. *Siano Y un sottospazio di X e A un sottoinsieme di Y. La chiusura di A in Y è uguale all'intersezione di Y e della chiusura di A in X.*

Dimostrazione. Sia $\mathcal{C}$ la famiglia dei chiusi di X che contengono A. I sottoinsiemi $C \cap Y$, $C \in \mathcal{C}$, sono tutti e soli i chiusi di Y che contengono A e quindi

$$\bigcap_{C \in \mathcal{C}} (Y \cap C) = Y \cap \bigcap_{C \in \mathcal{C}} C.$$

□

Lemma 7.4. *Siano X uno spazio topologico, $Y \subset X$ un sottospazio topologico e $Z \subset Y$ un sottoinsieme.*

(1) *Se Y è aperto in X allora Z è aperto in Y se e solo se è aperto in X.*
(2) *Se Y è chiuso in X allora Z è chiuso in Y se e solo se è chiuso in X.*
(3) *Se Y è un intorno di y allora Z è un intorno di y in Y se e solo se è un intorno di y in X.*

Dimostrazione. L'unica asserzione non banale è la terza. Sia U un aperto di X tale che $y \in U \subset Y$. Se Z è un intorno di y in Y allora esiste un aperto V in Y tale che $x \in V \subset Z$. $V \cap U$ è aperto in U e quindi in X.

Viceversa, se esiste un aperto V in X tale che $x \in V \subset Z$ allora $V = V \cap Y$ è aperto anche in Y. □

Definizione 7.5. Un'applicazione continua ed iniettiva $f\colon X \to Y$ si dice una **immersione (topologica)** se gli aperti di X sono tutti e soli i sottoinsiemi del tipo $f^{-1}(A)$, al variare di A tra gli aperti di Y.

In altri termini, un'applicazione $f\colon X \to Y$ è una immersione se e solo se induce un omeomorfismo tra X ed il sottospazio topologico $f(X)$.

Non tutte le applicazioni continue ed iniettive sono immersioni. Ad esempio l'applicazione identità

$$Id\colon (\mathbb{R},\ \text{topologia euclidea}) \to (\mathbb{R},\ \text{topologia indiscreta})$$

è continua ed iniettiva ma non è una immersione.

Definizione 7.6. Una **immersione chiusa** è una immersione che è anche un'applicazione chiusa. Una **immersione aperta** è una immersione che è anche un'applicazione aperta.

Proposizione 7.7. *Sia $f\colon X \to Y$ un'applicazione continua.*
Se f è chiusa ed iniettiva, allora f è una immersione chiusa.
Se f è aperta ed iniettiva, allora f è una immersione aperta.

Dimostrazione. Supponiamo f è iniettiva, continua e chiusa. Per ogni chiuso $C \subset X$, l'immagine $f(C) \subset f(X)$ è chiusa in Y e quindi è chiusa anche nella topologia di sottospazio su $f(X)$. Ne segue che la restrizione $f\colon X \to f(X)$ è continua, bigettiva e chiusa e quindi un omeomorfismo. Il caso di f aperta è simile ed è lasciato per esercizio. □

Esistono immersioni che non sono né chiuse né aperte. Infatti è facile dimostrare (esercizio) che una immersione $f\colon X \to Y$ è chiusa se e solo se $f(X)$ è chiuso in Y ed è aperta se e solo se $f(X)$ è aperto in Y.

Esercizio 7.8. Si considerino $X = \mathbb{R} - \{1\}$, $Y = \{y^2 = x^2 + x^3\} \subset \mathbb{R}^2$ e $f\colon X \to Y$, $f(t) = (t^2 - 1, t^3 - t)$. Mostrare che f è continua, bigettiva, ogni $x \in X$ possiede un intorno U tale che $f\colon U \to f(U)$ è un omeomorfismo. Dire infine se f è un omeomorfismo locale.

Esercizio 7.9. Sia X uno spazio topologico, un sottoinsieme $Z \subset X$ si dice **discreto** se la topologia di sottospazio su Z è la topologia discreta. Dimostrare che un sottospazio $Z \subset X$ è discreto se e solo se per ogni $z \in Z$ esiste un aperto $U \subset X$ tale che $U \cap Z = \{z\}$. Dire inoltre, motivando la risposta, se è vero o falso che la chiusura di un sottoinsieme discreto è ancora un sottoinsieme discreto.

8. Prodotti topologici

Siano P, Q spazi topologici, denotiamo con $P \times Q$ il loro prodotto cartesiano e con $p\colon P \times Q \to P$, $q\colon P \times Q \to Q$ le proiezioni sui fattori. La collezione $\mathfrak{T}$ delle topologie su $P \times Q$ che rendono continue p e q è non vuota poiché contiene la topologia discreta e l'intersezione di tutte le topologie in $\mathfrak{T}$ è la meno fine tra quelle che rendono p e q continue.

Definizione 8.1. La **topologia prodotto** su $P \times Q$ è la topologia meno fine tra quelle che rendono continue entrambe le proiezioni.

Teorema 8.2. *Nelle notazioni precedenti:*

(1) *I sottoinsiemi della forma $U \times V$, al variare di U e V tra gli aperti di P e Q, formano una base di aperti, che chiameremo **base canonica** della topologia prodotto.*
(2) *Le proiezioni p, q sono applicazioni aperte e le restrizioni $p\colon P \times \{y\} \to P$, $q\colon \{x\} \times Q \to Q$ sono omeomorfismi.*
(3) *Un'applicazione $f\colon X \to P \times Q$, $f = (f_1, f_2)$, è continua se e solo se f_1 e f_2 sono continue.*

Dimostrazione. [1] Se U e V sono aperti allora $U \times V = p^{-1}(U) \cap q^{-1}(V)$ è aperto nella topologia prodotto. Inoltre, poiché $(U_1 \times V_1) \cap (U_2 \times V_2) = (U_1 \cap U_2) \times (V_1 \cap V_2)$, i sottoinsiemi della forma $U \times V$, U, V aperti, sono una base di una topologia che rende le proiezioni continue.
[2] Sia $y \in Q$, allora

$$U \times V \cap P \times \{y\} = \begin{cases} U & \text{se } y \in V \\ \emptyset & \text{se } y \notin V \end{cases}$$

e quindi gli aperti del sottospazio topologico $P \times \{y\}$ sono tutte e sole le unioni di $U \times \{y\}$ al variare di U tra gli aperti di P. Ne segue che $p\colon P \times \{y\} \to P$ è un omeomorfismo. Sia A un aperto di $P \times Q$. Si può scrivere $p(A) = \cup_y p(A \cap P \times \{y\})$ ed ogni $p(A \cap P \times \{y\})$ è aperto in P.
[3] f è continua se e solo se la controimmagine di ogni aperto di una base è ancora aperto, se e solo se per ogni coppia di aperti $U \subset P$ e $V \subset Q$ il sottoinsieme $f^{-1}(U \times V) = f_1^{-1}(U) \cap f_2^{-1}(V)$ è aperto in X. □

Esempio 8.3. Sul prodotto cartesiano di due spazi metrici (X, h), (Y, k), le distanze equivalenti d_1, d_2 e d_∞ (Esempio 6.13) inducono la topologia prodotto.

La costruzione precedente si estende al prodotto di un qualsiasi insieme finito[b] $P_1, \dots, P_n$ di spazi topologici. La topologia prodotto su $P_1 \times \cdots \times P_n$ è la meno fine tra tutte le topologie che rendono le proiezioni continue. La base canonica della topologia prodotto è data dai sottoinsiemi della forma $U_1 \times \cdots \times U_n$, al variare di U_i tra gli aperti in P_i.

Esempio 8.4. La topologia euclidea su $\mathbb{R}^n$ coincide con la topologia prodotto di n copie di $\mathbb{R}$.

Esercizio 8.5. Siano $f\colon X \to Y$ e $g\colon Z \to W$ due applicazioni continue di spazi topologici e denotiamo

$$f \times g\colon X \times Z \to Y \times W, \qquad f \times g(x, z) = (f(x), g(z)).$$

(1) Provare che $f \times g$ è continua.
(2) Provare che se f e g sono aperte, allora $f \times g$ è aperta.
(3) Mostrare con un esempio che se f e g sono chiuse, allora $f \times g$ può non essere è chiusa.

Esercizio 8.6. Dati tre spazi topologici X, Y e Z, mostrare che la topologia prodotto su $X \times Y \times Z$ è la stessa della topologia su $X \times (Y \times Z)$.

[b] Per i prodotti infiniti la situazione è leggermente diversa, vedi [1]

Esercizio 8.7. Siano X, Y spazi topologici, $A \subset X$, $B \subset Y$ sottoinsiemi. Dimostrare che $\overline{A \times B} = \overline{A} \times \overline{B}$. In particolare se A e B sono chiusi, allora $A \times B$ è chiuso nel prodotto.

Esercizio 8.8. Provare che se (X, d) è uno spazio metrico, allora $d \colon X \times X \to \mathbb{R}$ è continua rispetto alla topologia prodotto in $X \times X$.

9. Spazi di Hausdorff

Definizione 9.1. Uno spazio topologico si dice di **Hausdorff** o **T2** se punti distinti hanno intorni disgiunti.

In altri termini, uno spazio topologico X è di Hausdorff se per ogni coppia di punti distinti $x, y \in X$, esistono due intorni $U \in I(x)$ e $V \in I(y)$ tali che $U \cap V = \emptyset$.

Non tutti gli spazi topologici sono di Hausdorff, ad esempio la topologia indiscreta non è di Hausdorff, tranne il caso banale in cui lo spazio è vuoto oppure possiede un solo punto.

Esempio 9.2. Ogni spazio metrico è di Hausdorff. Se d indica la distanza e $x \neq y$ allora $d(x, y) > 0$. Se $0 < r < \dfrac{d(x, y)}{2}$, allora le palle $B(x, r)$ e $B(y, r)$ sono disgiunte: infatti ogni $z \in B(x, r) \cap B(y, r)$ produrrebbe la contraddizione $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) < 2r < d(x, y)$.

Lemma 9.3. *In uno spazio di Hausdorff i sottoinsiemi finiti sono chiusi.*

Dimostrazione. Basta dimostrare che i punti sono chiusi, e cioè che se X è di Hausdorff e $x \in X$, allora $X - \{x\}$ è aperto. Se $y \in X - \{x\}$, allora esistono intorni disgiunti $U \in I(x)$, $V \in I(y)$; a maggior ragione $V \subset X - \{x\}$ e quindi $X - \{x\}$ è intorno di ogni suo punto. $\square$

Proposizione 9.4. *Sottospazi e prodotti di spazi di Hausdorff sono di Hausdorff.*

Dimostrazione. Siano X uno spazio di Hausdorff, $Y \subset X$ un sottospazio e $x, y \in Y$ punti distinti. Esistono allora due aperti disgiunti $U, V \subset X$ tali che $x \in U$ e $y \in V$. I sottoinsiemi $U \cap Y$ e $V \cap Y$ sono aperti disgiunti di Y.

Siano X, Y spazi di Hausdorff e $(x, y), (z, w) \in X \times Y$ punti distinti; supponiamo per fissare le idee che $x \neq z$, esistono allora due aperti disgiunti $U, V \subset X$ tali che $x \in U$ e $z \in V$. Ne segue che $(x, y) \in U \times Y$, $(z, w) \in V \times Y$ e $U \times Y \cap V \times Y = (U \cap V) \times Y = \emptyset$. $\square$

Teorema 9.5. *Uno spazio topologico è di Hausdorff se e solo se la diagonale è chiusa nel prodotto.*

Dimostrazione. La diagonale di uno spazio topologico X è il sottoinsieme

$$\Delta = \{(x, x) \mid x \in X\} \subset X \times X.$$

Supponiamo che X sia di Hausdorff e consideriamo un punto $(x, y) \in X \times X - \Delta$. Per definizione di diagonale si ha $x \neq y$ e dunque esistono due aperti U, V di X tali che $x \in U$, $y \in V$ e $U \cap V = \emptyset$. Quindi $(x, y) \in U \times V \subset X \times X - \Delta$. Questo prova che $X \times X - \Delta$ è intorno di ogni suo punto e che la diagonale è chiusa.

Viceversa, se Δ è chiusa in $X \times X$ e $x \neq y$, allora esistono due aperti $U, V \subset X$ tali che $(x, y) \in U \times V \subset X \times X - \Delta$ e quindi $x \in U$, $y \in V$ e $U \cap V = \emptyset$. $\square$

Corollario 9.6. *Siano $f, g\colon X \to Y$ applicazioni continue con Y di Hausdorff. Allora l'insieme $C = \{x \in X \mid f(x) = g(x)\}$ è chiuso in X.*

Dimostrazione. L'applicazione $\Phi\colon X \to Y \times Y$, $\Phi(x) = (f(x), g(x))$, è continua e basta osservare che $C = \Phi^{-1}(\Delta)$, dove Δ è la diagonale di Y. □

Lemma 9.7. *Sia X uno spazio topologico di Hausdorff e sia $p_1, \dots, p_n$ una successione finita di punti distinti di X. Allora esiste una successione finita $U_1, \dots, U_n$ di aperti disgiunti di X tali che $p_i \in U_i$ per ogni i.*

Dimostrazione. Per ogni coppia $1 \le i < j \le n$ possiamo trovare due aperti disgiunti U_{ij} e U_{ji} tali che $p_i \in U_{ij}$ e $p_j \in U_{ji}$. Basta allora considerare, per ogni indice i fissato, l'aperto $U_i = \cap\{U_{ij} \mid j \neq i\}$. □

Esercizio 9.8. Sia X uno spazio di Hausdorff, dimostrare che
$$U = \{(x_1, \dots, x_n) \in X^n \mid x_i \neq x_j \ \forall i \neq j\}$$
è un aperto di X^n.

Esercizio 9.9. Siano $f, g\colon X \to Y$ applicazioni continue, Y di Hausdorff e $A \subset X$ un sottoinsieme denso. Dimostrare che se $f(x) = g(x)$ per ogni $x \in A$, allora $f = g$.

Esercizio 9.10. Sia X uno spazio topologico e denotiamo con $I(x)$ la famiglia degli intorni di un punto $x \in X$. Dimostrare che X è di Hausdorff se e solo se per ogni $x \in X$ vale
$$\{x\} = \bigcap_{U \in I(x)} \overline{U}.$$

Esercizio 9.11. Siano $f\colon X \to Y$ continua, Y di Hausdorff. Provare che il grafico $\Gamma = \{(x, f(x)) \in X \times Y \mid x \in X\}$ è chiuso nel prodotto.

10. Proprietà di numerabilità

Definizione 10.1. Uno spazio topologico si dice a **base numerabile** se esiste una base della topologia formata da una quantità finita o numerabile di aperti.

Esempio 10.2. La retta euclidea $\mathbb{R}$ è a base numerabile: la famiglia
$$\{\,]c, d[\mid c, d \in \mathbb{Q}\}$$
degli intervalli aperti ad estremi razionali è numerabile ed è una base della topologia euclidea. Infatti ogni aperto di $\mathbb{R}$ è unione di intervalli aperti e per ogni intervallo $]a, b[$ vale
$$]a, b[= \bigcup_{c,d \in]a,b[\cap \mathbb{Q}}]c, d[.$$

Sottospazi di spazi a base numerabile sono ancora a base numerabile.

Ricordiamo (Definizione 4.2) che un sottoinsieme di uno spazio topologico si dice denso se interseca ogni aperto non vuoto.

Definizione 10.3. Uno spazio topologico si dice **separabile** se contiene un sottoinsieme denso e numerabile.

Lemma 10.4. *Ogni spazio topologico a base numerabile è separabile.*

Dimostrazione. Sia $\mathcal{B}$ una base numerabile di uno spazio topologico X. Per ogni aperto $U \in \mathcal{B}$ scegliamo un punto $p_U \in U$; l'insieme $B = \{p_U \mid U \in \mathcal{B}\}$ è numerabile, l'insieme $X - B$ non contiene alcun aperto della base e quindi $\overline{B} = X$. □

Lemma 10.5. *Ogni spazio metrico separabile è a base numerabile.*

Dimostrazione. Sia X uno spazio metrico separabile, scegliamo un sottoinsieme $E \subset X$ denso e numerabile. È sufficiente dimostrare che la famiglia numerabile di palle aperte

$$\mathcal{B} = \{B(e, 2^{-n}) \mid e \in E,\, n \in \mathbb{N}\}$$

è una base della topologia. Sia U un aperto di X e $x \in U$. Sia $n \in \mathbb{N}$ un intero tale che $B(x, 2^{1-n}) \subset U$. Poiché E è denso esiste $e \in E \cap B(x, 2^{-n})$. Per simmetria $x \in B(e, 2^{-n})$ e per la disuguaglianza triangolare $B(e, 2^{-n}) \subset B(x, 2^{1-n}) \subset U$. □

Esempio 10.6. Il prodotto di due spazi topologici a base numerabile è ancora a base numerabile. Infatti è facile vedere che se $\mathcal{A}$ è una base di aperti di X e $\mathcal{B}$ è una base di aperti di Y, allora la famiglia

$$\mathcal{C} = \{A \times B \mid A \in \mathcal{A},\ B \in \mathcal{B}\}$$

è una base di aperti del prodotto $X \times Y$. Se $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono entrambe numerabili, allora anche $\mathcal{C}$ è numerabile.

Definizione 10.7. Uno spazio topologico soddisfa il **primo assioma di numerabilità** se ogni punto possiede un sistema fondamentale di intorni finito o numerabile.

Lemma 10.8. *Gli spazi metrici e gli spazi a base numerabile soddisfano il primo assioma di numerabilità.*

Dimostrazione. Sia x un punto in uno spazio metrico, allora la famiglia di palle aperte $\{B(x, 2^{-n}) \mid n \in \mathbb{N}\}$ è un sistema fondamentale di intorni di x.

Se $\mathcal{B}$ è una base numerabile, allora gli aperti di $\mathcal{B}$ che contengono un dato punto x formano un sistema fondamentale di intorni di x. □

Esercizio 10.9. Provare che il prodotto di due spazi separabili è separabile. Trovare un esempio di spazio separabile e di un suo sottospazio non separabile.

11. Connessione

Definizione 11.1. Uno spazio topologico X si dice **connesso** se gli unici sottoinsiemi contemporaneamente aperti e chiusi sono $\emptyset$ e X. Uno spazio topologico che non è connesso si dice **sconnesso**.

Lemma 11.2. *Per uno spazio topologico X le seguenti condizioni sono equivalenti:*

(1) *X è connesso.*
(2) *Se $X = A_1 \cup A_2$ con A_1 e A_2 aperti non vuoti, allora $A_1 \cap A_2 \neq \emptyset$.*
(3) *Se $X = C_1 \cup C_2$ con C_1 e C_2 chiusi non vuoti, allora $C_1 \cap C_2 \neq \emptyset$.*

Dimostrazione. [$1 \Rightarrow 2$] Se fosse $A_1 \cap A_2 = \emptyset$, allora l'aperto proprio $A_2 = X - A_1$ sarebbe anche chiuso.
[$2 \Rightarrow 3$] Consideriamo gli aperti $A_1 = X - C_1$, $A_2 = X - C_2$. Vale $A_1 \cap A_2 = \emptyset$ e se fosse $C_1 \cap C_2 = \emptyset$ allora $A_1 \cup A_2 = X$.
[$3 \Rightarrow 1$] Se C_1 è un sottoinsieme proprio e non vuoto, contemporaneamente chiuso ed aperto, allora $C_2 = X - C_1$ è chiuso e la coppia C_1, C_2 contraddice la condizione 3. □

Diremo che un sottospazio topologico è connesso se lo è per la topologia indotta. In altri termini un sottospazio $Y \subset X$ è connesso se per ogni coppia A, B di aperti di X tali che $Y \subset A \cup B$ e $Y \cap A \cap B = \emptyset$ si ha che $Y \cap A = \emptyset$ oppure $Y \cap B = \emptyset$. Osserviamo inoltre che se $A \subset X$ è aperto e chiuso e $Y \subset X$ è un sottospazio connesso, allora $Y \subset A$ oppure $Y \cap A = \emptyset$.

Teorema 11.3. *L'intervallo* $[0, 1]$ *è connesso per la topologia euclidea.*

Dimostrazione. Siano C e D due chiusi non vuoti di $[0, 1]$ tali che $C \cup D = [0, 1]$; vogliamo dimostrare che $C \cap D \neq \emptyset$. Supponiamo per fissare le idee che $0 \in C$; se $0 \in D$ abbiamo finito, altrimenti sia $d \in [0, 1]$ l'estremo inferiore di D. Poiché D è chiuso deve essere $d \in D$ e quindi $d > 0$. Poniamo $E = C \cap [0, d]$. Dato che E è chiuso e contiene $[0, d[$ si ha che $d \in E$ e quindi $d \in C$. □

Teorema 11.4. *Le immagini continue di sottospazi connessi sono connesse.*

Dimostrazione. Bisogna dimostrare che se $f\colon X \to Y$ è un'applicazione continua e $Z \subset X$ è un sottospazio connesso, allora $f(Z)$ è connesso.

L'applicazione $f\colon Z \to f(Z)$ è continua relativamente alle topologie di sottospazio. Se $A \subset f(Z)$ è contemporaneamente aperto e chiuso, allora anche $f^{-1}(A)$ è aperto e chiuso e dunque $f^{-1}(A) = \emptyset$ oppure $f^{-1}(A) = Z$. Nel primo caso $A = \emptyset$, nel secondo $A = f(Z)$. □

Definizione 11.5. Uno spazio topologico X si dice **connesso per archi** se per ogni coppia di punti $x, y \in X$ esiste un'applicazione continua $f\colon [0, 1] \to X$ tale che $f(0) = x$ e $f(1) = y$.

È chiaro che l'immagine continua di uno spazio connesso per archi è ancora connessa per archi.

Lemma 11.6. *Ogni spazio connesso per archi è connesso.*

Dimostrazione. Sia X uno spazio connesso per archi e siano $A, B \subset X$ due aperti non vuoti e tali che $A \cup B = X$. Scegliamo due punti $x \in A$, $y \in B$ ed un'applicazione continua $f\colon [0, 1] \to X$ tale che $f(0) = x$ e $f(1) = y$. Gli aperti $f^{-1}(A)$, $f^{-1}(B)$ sono non vuoti, la loro unione è $[0, 1]$ e quindi esiste $t \in f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$. Il punto $f(t)$ appartiene a $A \cap B$ che quindi è non vuoto. □

Esempio 11.7. La sfera S^n è connessa per archi per ogni $n > 0$. Un possibile modo per dimostrarlo è per induzione su n, essendo il caso $n = 1$ del tutto evidente. Se $x, y \in S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$, con $n > 1$, allora intersecando S^n con un piano V contenente l'origine ed i punti x, y, troviamo che i due punti sono contenuti nel sottospazio $V \cap S^n$ che è omeomorfo a S^1.

Corollario 11.8. *Ogni sottoinsieme convesso di* $\mathbb{R}^n$ *è connesso per archi e quindi connesso.*

Dimostrazione. Sia A un sottoinsieme convesso di $\mathbb{R}^n$; per ogni $x, y \in A$ l'applicazione $f\colon [0,1] \to A$ data da $f(t) = tx + (1-t)y$ è continua. $\square$

Corollario 11.9. *Per un sottoinsieme $I \subset \mathbb{R}$ le seguenti condizioni sono equivalenti:*

(1) *I è un intervallo, ossia un sottoinsieme convesso.*
(2) *I è connesso per archi.*
(3) *I è connesso.*

Dimostrazione. L'unica implicazione non banale è la $[3 \Rightarrow 1]$. Se $I \subset \mathbb{R}$ non è un intervallo, allora esistono $a < b < c$ tali che $a, c \in I$ e $b \notin I$. I due aperti disgiunti $I \cap]-\infty, b[$ e $I \cap]b, +\infty[$ sono non vuoti e quindi I non è connesso. $\square$

È possibile dimostrare che ogni aperto connesso di $\mathbb{R}^n$ è anche connesso per archi [1, Prop. 10.5], mentre per $n \geq 2$ esistono sottoinsiemi chiusi e connessi di $\mathbb{R}^n$ che non sono connessi per archi [1, Esercizio 4.18]. Dunque in generale uno spazio connesso può non esserlo per archi.

Siamo adesso in grado di dare le prime applicazioni della connessione.

Esempio 11.10. L'intervallo $]0,1[$ non è omeomorfo a $[0,1[$. Supponiamo per assurdo che $f\colon [0,1[\to]0,1[$ sia un omeomorfismo, allora f induce per restrizione un omeomorfismo $f\colon\ ]0,1[\to]0,1[- \{f(0)\}$. La contraddizione si ottiene osservando che $]0,1[$ è connesso mentre $]0,1[- \{f(0)\}$ è sconnesso.

Lemma 11.11. *Siano Y uno spazio topologico connesso ed $f\colon X \to Y$ un'applicazione continua e surgettiva tale che $f^{-1}(y)$ sia connesso per ogni $y \in Y$. Se f è aperta oppure se f è chiusa, allora anche X è connesso.*

Dimostrazione. Consideriamo prima il caso in cui f è aperta e siano $A_1, A_2 \subset X$ due aperti non vuoti tali che $X = A_1 \cup A_2$. Dato che $Y = f(A_1) \cup f(A_2)$ e che Y è connesso, esiste $y \in f(A_1) \cap f(A_2)$ e dunque $f^{-1}(y) \cap A_i \neq \emptyset$ per $i = 1, 2$. Siccome $f^{-1}(y)$ è connesso ne segue che $f^{-1}(y) \cap A_1 \cap A_2 \neq \emptyset$ ed a maggior ragione $A_1 \cap A_2 \neq \emptyset$.

Supponiamo adesso f chiusa e siano $C, D \subset X$ chiusi non vuoti tali che $X = C \cup D$; poiché f è un'applicazione chiusa si ha $Y = f(C) \cup f(D)$, con $f(C)$ e $f(D)$ chiusi e quindi esiste $y \in f(C) \cap f(D)$. I chiusi $C \cap f^{-1}(y)$ e $D \cap f^{-1}(y)$ sono entrambi non vuoti e, siccome $f^{-1}(y)$ è connesso, deve essere $C \cap D \cap f^{-1}(y) \neq \emptyset$. $\square$

Teorema 11.12. *Il prodotto di due spazi topologici connessi è connesso.*

Dimostrazione. Bisogna dimostrare che se X e Y sono spazi topologici connessi, allora anche $X \times Y$ è connesso. A tal fine è sufficiente osservare che la proiezione $X \times Y \to Y$ è continua, surgettiva, aperta e le fibre sono omeomorfe ad X. La tesi segue dal Lemma 11.11. $\square$

Per induzione si deduce immediatamente che il prodotto di un numero finito di spazi connessi è connesso.

Esercizio 11.13. Siano $p, q \in \mathbb{R}^2$ i punti di coordinate $(1,0)$ e $(-1,0)$ rispettivamente. Quali dei seguenti sottospazi di $\mathbb{R}^2$ sono connessi?

(1) $\{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x-p\| < 1 \text{ oppure } \|x-q\| < 1\}$;
(2) $\{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x-p\| < 1 \text{ oppure } \|x-q\| \leq 1\}$;
(3) $\{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x-p\| \leq 1 \text{ oppure } \|x-q\| \leq 1\}$.

Esercizio 11.14. Quali sono i sottospazi connessi di uno spazio topologico dotato della topologia discreta?

Esercizio 11.15. Un sottoinsieme A di $\mathbb{R}^n$ si dice **stellato** rispetto ad un punto $a \in A$ se per ogni $b \in A$ il segmento che unisce a e b è interamente contenuto in A. Dimostrare che i sottoinsiemi stellati sono connessi per archi.

Esercizio 11.16. Sia $X \subset \mathbb{R}^2$ un sottoinsieme limitato e convesso. Dimostrare che $\mathbb{R}^2 - X$ è connesso per archi.

Esercizio 11.17. Provare che se $n \geq 2$, allora il complementare di un sottoinsieme finito o numerabile di $\mathbb{R}^n$ è connesso per archi.

12. Componenti connesse

Definizione 12.1. Sia X uno spazio topologico. Un sottospazio $C \subset X$ si dice una **componente connessa** di X se soddisfa le seguenti due proprietà:

(1) C è connesso.
(2) Se $C \subset A$ ed A è connesso, allora $C = A$.

Quindi, con altre parole, una componente connessa è un elemento massimale della famiglia dei sottospazi connessi ordinata per inclusione.

Lemma 12.2. *La chiusura di un sottospazio topologico connesso è connessa.*

Dimostrazione. Bisogna dimostrare che se Y è un sottospazio connesso di uno spazio topologico X, allora la sua chiusura $\overline{Y}$ è connessa.

Siano A, B aperti di X tali che $\overline{Y} \subset A \cup B$ e $A \cap B \cap \overline{Y} = \emptyset$. Siccome Y è connesso si ha $A \cap Y = \emptyset$ oppure $B \cap Y = \emptyset$: nel primo caso, segue dalla definizione di $\overline{Y}$ che $A \cap \overline{Y} = \emptyset$ e similmente nel secondo caso. □

Lemma 12.3. *Sia x un punto di uno spazio topologico X e sia $\{Z_i \mid i \in I\}$ una famiglia di sottospazi connessi di X che contengono x. Allora $W = \bigcup_i Z_i$ è connesso.*

Dimostrazione. Sia $A \subset W$ contemporaneamente aperto, chiuso e non vuoto: proviamo in due passi che $A = W$.
1) A non è vuoto e quindi esiste un indice i tale che $A \cap Z_i \neq \emptyset$. L'insieme $A \cap Z_i$ è non vuoto ed è aperto e chiuso in Z_i, quindi $Z_i \subset A$ ed in particolare $x \in A$.
2) Siccome $x \in A$ si ha che $Z_j \cap A$ non è vuoto per ogni j e, ragionando come al punto 1), si ha che $Z_j \subset A$ e quindi $W = A$. □

Corollario 12.4. *Siano A, B sottospazi connessi di uno spazio topologico. Se $A \cap B \neq \emptyset$, allora $A \cup B$ è connesso.*

Dimostrazione. Sia $x \in A \cap B$. Basta applicare il Lemma 12.3 alla famiglia $\{A, B\}$. □

Lemma 12.5. *Sia x un punto di uno spazio topologico X e denotiamo con $C(x)$ l'unione di tutti i sottospazi connessi di X che contengono x, ossia*

$$C(x) = \cup\{Y \mid x \in Y \subset X,\ Y \text{ connesso } \}.$$

Allora $C(x)$ è una componente connessa di X che contiene il punto x.

Dimostrazione. Notiamo innanzitutto che $\{x\}$ è un sottospazio connesso e quindi $x \in C(x)$. Applicando il Lemma 12.3 alla famiglia $\{Z_i\}$ di tutti i sottospazi connessi contenenti x, si ricava che la $C(x)$ è un sottospazio connesso. Sia $A \subset X$ un sottospazio connesso che contiene $C(x)$, in particolare $x \in A$, per definizione di $C(x)$ si ha $A \subset C(x)$ e quindi $C(x) = A$. □

Definizione 12.6. Nelle notazioni del Lemma 12.5, chiameremo $C(x)$ la **componente connessa di X che contiene x**, oppure la **componente connessa di x in X**.

Teorema 12.7. *Ogni spazio topologico è unione delle sue componenti connesse. Ogni componente connessa è chiusa ed ogni punto è contenuto in una ed una sola componente connessa.*

Dimostrazione. Per il Lemma 12.5 ogni punto è contenuto in almeno una componente connessa. Se C, D sono due componenti connesse e $C \cap D \neq \emptyset$, allora per il Corollario 12.4, il sottospazio $C \cup D$ è connesso e, siccome $C \subset C \cup D$, $D \subset C \cup D$, ne segue che $C = C \cup D = D$. Infine, se C è una componente connessa, allora per il Lemma 12.2 il sottospazio $\overline{C}$ è connesso e contiene C; ne consegue che $C = \overline{C}$. □

Le componenti connesse non sono in generale aperte; tuttavia in molti casi concreti saranno aperte in virtù del seguente risultato.

Lemma 12.8. *Se ogni punto di uno spazio topologico X possiede un intorno connesso, allora le componenti connesse in X sono aperte.*

Dimostrazione. Sia $C \subset X$ una componente connessa, $x \in C$ ed U un intorno connesso di x. Poiché $x \in C \cap U$, l'unione $C \cup U$ è ancora connessa e quindi $C \cup U = C$, ovvero $U \subset C$ e C è un intorno di x. □

Ogni omeomorfismo tra spazi topologici trasforma componenti connesse in componenti connesse e quindi due spazi omeomorfi devono avere lo stesso numero di componenti connesse.

Esempio 12.9. $X = \mathbb{R} - \{0\}$ non è omeomorfo a $Y = \mathbb{R} - \{0, 1\}$. Infatti X ha due componenti connesse $]-\infty, 0[$ e $]0, +\infty[$, mentre Y ne ha tre, $]-\infty, 0[$, $]0, 1[$ e $]1, +\infty[$.

Esercizio 12.10. Siano A, B sottospazi chiusi di uno spazio topologico tali che $A \cup B$ e $A \cap B$ sono connessi. Provare che anche A e B sono connessi.

Esercizio 12.11. Dimostrare che il prodotto di due spazi connessi per archi è connesso per archi.

Esercizio 12.12. Sia $Y \subset X$ un sottospazio connesso e sia $\{Z_i \mid i \in I\}$ una famiglia di sottospazi connessi di X che intersecano Y. Dimostrare che $W = Y \cup \bigcup_i Z_i$ è connesso.

13. Ricoprimenti

Definizione 13.1. Un **ricoprimento** di uno spazio topologico X è una famiglia $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ di sottoinsiemi di X tali che $X = \cup\{A \mid A \in \mathcal{A}\}$. Diremo che il ricoprimento è **finito** se $\mathcal{A}$ è una famiglia finita. Diremo che il ricoprimento è **aperto** se ogni elemento di $\mathcal{A}$ è un sottoinsieme aperto di X. Se $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono ricoprimenti di X e se $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$, allora diremo che $\mathcal{A}$ è un **sottoricoprimento** di $\mathcal{B}$.

Esempio 13.2. Ogni base della topologia è un ricoprimento aperto.

Spesso è conveniente lavorare con ricoprimenti definiti mediante famiglie indicizzate, ovvero $\mathcal{A} = \{U_i \mid i \in I\}$. In tal caso, e salvo avviso contrario, è consentito che $U_i = U_j$ per qualche coppia di indici $i, j \in I$.

Proposizione 13.3. *In uno spazio topologico a base numerabile, ogni ricoprimento aperto ammette un sottoricoprimento numerabile.*

Dimostrazione. Siano X uno spazio topologico a base numerabile e $\mathcal{A}$ un suo ricoprimento aperto. Scegliamo una base numerabile $\mathcal{B}$ della topologia e, per ogni $x \in X$, scegliamo un aperto $U \in \mathcal{A}$ ed un elemento $B_x \in \mathcal{B}$ tale che $x \in B_x \subset U$. La famiglia di aperti $\mathcal{B}' = \{B_x \mid x \in X\}$ è un sottoricoprimento di $\mathcal{B}$ ed è quindi numerabile. Inoltre per costruzione esiste un'applicazione $j\colon \mathcal{B}' \to \mathcal{A}$, detta di raffinamento, tale che $B \subset j(B)$ per ogni $B \in \mathcal{B}'$. L'immagine di j è un sottoricoprimento numerabile di $\mathcal{A}$. $\square$

Esercizio 13.4. Sia $\mathcal{A}$ un ricoprimento aperto di uno spazio topologico X e consideriamo la famiglia $\mathcal{B}$ degli aperti di X che sono contenuti in qualche $A \in \mathcal{A}$. Provare che $\mathcal{B}$ è una base della topologia.

14. Spazi topologici compatti

Definizione 14.1. Uno spazio topologico X si dice **compatto** se ogni ricoprimento aperto possiede un sottoricoprimento finito. Un sottospazio di uno spazio topologico si dice compatto se è compatto per la topologia indotta.

Dalla definizione di topologia di sottospazio segue che un sottospazio $K \subset X$ è compatto se e solo se per ogni famiglia $\mathcal{A}$ di aperti di X tali che $K \subset \cup\{A \mid A \in \mathcal{A}\}$, esistono $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{A}$ tali che $K \subset A_1 \cup \cdots \cup A_n$.

Ogni insieme finito è compatto, indipendentemente dalla topologia su di esso; uno spazio topologico discreto è compatto se e solo se è finito.

Teorema 14.2. *L'intervallo* $[0, 1] \subset \mathbb{R}$ *è compatto.*

Dimostrazione. Sia $\mathcal{A}$ un ricoprimento aperto di $[0, 1]$ e sia $X \subset [0, 1]$ l'insieme dei punti t tali che l'intervallo chiuso $[0, t]$ è contenuto nell'unione di un numero finito di aperti del ricoprimento $\mathcal{A}$. Per dimostrare il teorema bisogna provare che $1 \in X$. Sia b l'estremo superiore di X. Esiste allora un aperto $A \in \mathcal{A}$ tale che $b \in A$. Siccome A è aperto, esiste un $\delta > 0$ tale che

$$[b - \delta, b + \delta] \cap [0, 1] \subset A.$$

D'altra parte, per definizione di estremo superiore, vale $X \cap [b - \delta, b + \delta] \neq \emptyset$ e quindi esiste $t \in [b - \delta, b]$ tale che l'intervallo $[0, t]$ è contenuto in una unione finita di aperti del ricoprimento, diciamo

$$[0, t] \subset A_1 \cup \cdots \cup A_n.$$

Ne consegue che

$$[0, \min(1, b + \delta)] = [0, t] \cup ([b - \delta, b + \delta] \cap [0, 1]) \subset A \cup A_1 \cup \cdots \cup A_n.$$

Dunque $\min(1, b+\delta) \in X$ da cui segue $\min(1, b+\delta) \leq b \leq 1$ e quindi $b = 1 \in X$. $\square$

Teorema 14.3.

(1) *Ogni sottospazio chiuso di uno spazio compatto è compatto.*

(2) *Unione finita di sottospazi compatti è compatta.*
(3) *L'immagine continua di un compatto è compatta.*

Dimostrazione. [1] Sia Y un sottospazio chiuso di uno spazio topologico compatto X. Bisogna dimostrare che per ogni famiglia $\mathcal{A}$ di aperti di X tale che $Y \subset \cup\{A \mid A \in \mathcal{A}\}$, esistono finiti aperti $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{A}$ tali che $Y \subset A_1 \cup \dots \cup A_n$. La famiglia di aperti $\mathcal{A} \cup \{X - Y\}$ è un ricoprimento di X, che essendo compatto, consente di trovare $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{A}$ tali che $X = (X - Y) \cup A_1 \cup \dots \cup A_n$. È allora immediato osservare che $Y \subset A_1 \cup \dots \cup A_n$.
[2] Siano $K_1, \dots, K_n$ sottospazi compatti di uno spazio topologico X e sia $\mathcal{A}$ una famiglia di aperti di X che ricopre $K = K_1 \cup \dots \cup K_n$. Per ogni $h = 1, \dots, n$ esiste un sottofamiglia finita $\mathcal{A}_h \subset \mathcal{A}$ tale che $K_h \subset \cup\{A \mid A \in \mathcal{A}_h\}$ e quindi $K \subset \cup\{A \mid A \in \mathcal{A}_1 \cup \dots \cup \mathcal{A}_n\}$.
[3] Sia $f\colon X \to Y$ continua e surgettiva, X compatto e sia $\mathcal{A}$ un ricoprimento aperto di Y. La famiglia $f^{-1}\mathcal{A} = \{f^{-1}(A) \mid A \in \mathcal{A}\}$ è un ricoprimento aperto di X e quindi esistono $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{A}$ tali che $X = f^{-1}(A_1) \cup \dots \cup f^{-1}(A_n)$. Di conseguenza $Y = A_1 \cup \dots \cup A_n$. ☐

Corollario 14.4. *Un sottospazio di* $\mathbb{R}$ *è compatto se e solo se è chiuso e limitato.*

Dimostrazione. Osserviamo per prima cosa che la definizione di compattezza coinvolge solamente le nozioni di aperto e di ricoprimento ed è quindi invariante per omeomorfismo, cioè ogni spazio omeomorfo ad un compatto è compatto.

Sia $A \subset \mathbb{R}$ chiuso e limitato, allora $A \subset [-a, a]$ per qualche $a > 0$. L'intervallo $[-a, a]$ è omeomorfo a $[0, 1]$ e quindi compatto. Dunque A è un chiuso di un compatto ed è quindi compatto.

Viceversa, se $A \subset \mathbb{R}$ è un sottospazio compatto, allora la famiglia di intervalli aperti $\{\,]-n, n[\mid n \in \mathbb{N}\}$ ricopre A e quindi possiamo trovare un sottoricoprimento finito $A \subset]-n_1, n_1[\cup \dots \cup]-n_s, n_s[$. Ne segue che $A \subset]-N, N[$, dove N è un il massimo di $n_1, \dots, n_s$, e quindi A è limitato. Per ogni $p \notin A$, l'applicazione $f(x) = 1/(x - p)$ è continua e definita in $\mathbb{R} - \{p\}$. L'immagine $f(A)$ è compatta e quindi limitata; da questo segue che $p \notin \overline{A}$ e quindi che A è chiuso. ☐

Esempio 14.5. La retta $\mathbb{R}$ non è omeomorfa all'intervallo $[0, 1]$. Infatti $[0, 1]$ è compatto, mentre $\mathbb{R}$ non lo è.

Corollario 14.6. *Sia X uno spazio topologico compatto. Allora ogni funzione continua $f\colon X \to \mathbb{R}$ ammette massimo e minimo.*

Dimostrazione. L'immagine $f(X)$ è compatta in $\mathbb{R}$ e quindi chiusa e limitata. Ogni sottoinsieme chiuso e limitato di $\mathbb{R}$ ammette massimo e minimo. ☐

Teorema 14.7. *Sia $f\colon X \to Y$ un'applicazione chiusa. Se Y è compatto e se $f^{-1}(y)$ è compatto per ogni punto $y \in Y$, allora anche X è compatto.*

Dimostrazione. Per ogni aperto $A \subset X$ definiamo

$$A' = \{y \in Y \mid f^{-1}(y) \subset A\}.$$

Osserviamo che $Y - A' = f(X - A)$ e quindi, poiché f è chiusa, anche A' è aperto. Sia $\mathcal{A}$ un ricoprimento aperto di X e denotiamo con $\mathcal{B}$ la famiglia di tutti gli aperti che sono unione finita di elementi di $\mathcal{A}$. La famiglia di aperti $\mathcal{B}' = \{B' \mid B \in \mathcal{B}\}$ è un ricoprimento aperto di Y. Infatti se $y \in Y$, la fibra $f^{-1}(y)$ è compatta e quindi esistono $A_1, \dots, A_m \in \mathcal{A}$ tali che $f^{-1}(y) \subset A_1 \cup \dots \cup A_m$ e dunque $y \in B'$, dove $B = A_1 \cup \dots \cup A_m$. Dato che Y è compatto, esistono $B_1, \dots, B_n \in \mathcal{B}$ tali che

$Y = B'_1 \cup \cdots \cup B'_n$. Allora $X = B_1 \cup \cdots \cup B_n$, e siccome ogni B_i è una unione finita di elementi di $\mathcal{A}$, abbiamo trovato un sottoricoprimento finito di $\mathcal{A}$. $\square$

Esercizio 14.8. Diremo che una famiglia di sottoinsiemi $\mathcal{A}$ di un insieme X ha la **proprietà dell'intersezione finita** se per ogni sottofamiglia finita e non vuota $\mathcal{F} \subset \mathcal{A}$ vale $\cap\{A \mid A \in \mathcal{F}\} \neq \emptyset$. Dimostrare che uno spazio topologico è compatto se e solo se ogni famiglia di chiusi con la proprietà dell'intersezione finita ha intersezione non vuota.

15. Il teorema di Wallace

Siano X, Y spazi topologici e $A \subset X$, $B \subset Y$ sottoinsiemi. Allora $A \times B$ è un sottoinsieme di $X \times Y$ ed è possibile definire una struttura topologica su $A \times B$ in due modi distinti. Nel primo considerando $A \times B$ come un sottospazio dello spazio topologico $X \times Y$, nel secondo considerando $A \times B$ come il prodotto dei sottospazi A e B. Tuttavia è immediato osservare che la restrizione della base canonica di $X \times Y$ a $A \times B$ coincide con la base canonica di $A \times B$ e quindi le due procedure dànno luogo alla stessa topologia.

Teorema 15.1 (Wallace)**.** *Siano X, Y spazi topologici, $A \subset X$, $B \subset Y$ sottospazi compatti e $W \subset X \times Y$ un aperto tale che $A \times B \subset W$.*
Allora esistono due aperti, $U \subset X$ e $V \subset Y$, tali che
$$A \subset U, \quad B \subset V \quad e \quad U \times V \subset W.$$

Dimostrazione. Consideriamo dapprima il caso particolare in cui A è formato da un solo punto, diciamo $A = \{a\}$. Per ogni $y \in B$ esiste una coppia di aperti $U_y \subset X, V_y \subset Y$ tali che
$$(a, y) \in U_y \times V_y \subset W.$$
La famiglia $\{V_y \mid y \in B\}$ è un ricoprimento aperto di B; per compattezza esistono $y_1, \ldots, y_n \in B$ tali che $B \subset V_{y_1} \cup \cdots \cup V_{y_n}$. Se definiamo $U = U_{y_1} \cap \cdots \cap U_{y_n}$ e $V = V_{y_1} \cup \cdots \cup V_{y_n}$, allora vale
$$\{a\} \times B \subset U \times V \subset \cup_i U_{y_i} \times V_{y_i} \subset W.$$

Consideriamo adesso A compatto arbitrario. Abbiamo appena dimostrato che per ogni $a \in A$ esiste una coppia di aperti U_a, V_a tali che $\{a\} \times B \subset U_a \times V_a \subset W$. La famiglia $\{U_a \mid a \in A\}$ è un ricoprimento aperto di A; per compattezza esistono $a_1, \ldots, a_m \in A$ tali che $A \subset U_{a_1} \cup \cdots \cup U_{a_m}$. Gli aperti $U = U_{a_1} \cup \cdots \cup U_{a_m}$, $V = V_{a_1} \cap \cdots \cap V_{a_m}$ sono tali che $A \times B \subset U \times V \subset W$. $\square$

Il teorema di Wallace è utile soprattutto perché ha molti interessanti corollari.

Corollario 15.2. *Ogni sottospazio compatto di uno spazio topologico di Hausdorff è chiuso.*

Dimostrazione. Sia X uno spazio di Hausdorff e sia $K \subset X$ un sottospazio compatto. Per mostrare che K è chiuso proviamo che se $x \notin K$, allora esiste un aperto $U \subset X$ tale che $x \in U$ e $U \cap K = \emptyset$. Il prodotto $\{x\} \times K$ non interseca la diagonale $\Delta \subset X \times X$ e quindi, essendo X di Hausdorff, $\{x\} \times K$ è contenuto nell'aperto $W = X \times X - \Delta$. Per il Teorema di Wallace esistono due aperti U, V di X tali che $\{x\} \times K \subset U \times V \subset W$. In particolare $x \in U$ e $U \cap K = \emptyset$. $\square$

Corollario 15.3. *Siano X, Y spazi topologici.*

(1) *Se X è compatto, allora la proiezione $p\colon X \times Y \to Y$ è un'applicazione chiusa.*
(2) *Se X e Y sono compatti, allora $X \times Y$ è compatto.*

Dimostrazione. [1] Siano $C \subset X \times Y$ un chiuso e $y \notin p(C)$ un punto fissato. Dato che $X \times \{y\} \subset X \times Y - C$, per il Teorema di Wallace esiste un intorno aperto V di y tale che $X \times V \cap C = \emptyset$ e quindi $V \cap f(C) = \emptyset$.
[2] Basta applicare il Teorema 14.7 alla proiezione $X \times Y \to Y$. □

Per induzione si deduce che il prodotto di un numero finito di spazi compatti è compatto.

Corollario 15.4. *Un sottospazio di $\mathbb{R}^n$ è compatto se e solo se è chiuso e limitato.*

Dimostrazione. Se $A \subset \mathbb{R}^n$ è chiuso e limitato, allora $A \subset [-a, a]^n$ per qualche $a > 0$. L'intervallo $[-a, a]$ è omeomorfo a $[0, 1]$ e quindi compatto. Per il Teorema 15.3 il prodotto cartesiano $[-a, a]^n$ è compatto e quindi anche ogni suo sottospazio chiuso è compatto. Viceversa, se $A \subset \mathbb{R}^n$ è un sottospazio compatto, allora la funzione $d_0\colon A \to \mathbb{R}$, $d_0(x) = \|x\|$, è continua e quindi ammette massimo, ossia A è limitato. Inoltre $\mathbb{R}^n$ è di Hausdorff e quindi A è chiuso. □

Esempio 15.5. Le sfere S^n ed i dischi chiusi D^n sono chiusi e limitati nello spazio euclideo e quindi sono compatti.

Corollario 15.6. *Sia $f\colon X \to Y$ un'applicazione continua, con X compatto e Y di Hausdorff. Allora f è un'applicazione chiusa. In particolare, se f è bigettiva, allora è un omeomorfismo.*

Dimostrazione. Sia $A \subset X$ un sottoinsieme chiuso, allora A è compatto, quindi anche $f(A)$ è compatto e di conseguenza chiuso in Y. Ogni applicazione continua bigettiva e chiusa è un omeomorfismo. □

Proposizione 15.7. *Siano X uno spazio compatto di Hausdorff, $C \subset X$ un sottospazio chiuso e $x \in X - C$ un punto. Allora esistono due aperti $A, B \subset X$ tali che $x \in A$, $C \subset B$ e $A \cap B = \emptyset$.*

Dimostrazione. Il chiuso C è a sua volta compatto, per il teorema di Wallace esistono due aperti A, B tali che $\{x\} \times C \subset A \times B$ e $A \times B$ non interseca la diagonale. □

La Proposizione 15.7 è del tutto equivalente ad affermare che in uno spazio compatto di Hausdorff ogni punto possiede un sistema fondamentale di intorni chiusi e compatti (dettagli per esercizio).

Esercizio 15.8. Sia $D^n \subset \mathbb{R}^n$ il disco chiuso unitario e sia $U \subset D^n$ un aperto contenente il bordo $\partial D^n = S^{n-1}$. Provare che esiste un numero reale $r < 1$ tale che $D^n = B(0, r) \cup U$.

Esercizio 15.9. Siano X, Y spazi topologici e $C \subset X \times Y$ un sottospazio chiuso. Provare che se X è compatto, allora la proiezione $C \to Y$ è un'applicazione chiusa.

Esercizio 15.10. Un sottoinsieme A di uno spazio topologico X si dice **relativamente compatto** se è contenuto in un sottospazio compatto di X. Provare che:

(1) Se X è di Hausdorff, allora un sottospazio A è relativamente compatto se e solo se $\overline{A}$ è compatto.

(2) L'immagine continua di un relativamente compatto è relativamente compatta.

Esercizio 15.11. Dimostrare che un'applicazione tra due spazi compatti di Hausdorff è continua se e solo se il grafico è chiuso nel prodotto.

16. Identificazioni

Il concetto "duale" di immersione è quello di identificazione.

Definizione 16.1. Un'applicazione continua e surgettiva $f\colon X \to Y$ si dice una **identificazione** se gli aperti di Y sono tutti e soli i sottoinsiemi $A \subset Y$ tali che $f^{-1}(A)$ è aperto in X.

Notiamo che f^{-1} commuta con il passaggio al complementare e quindi un'applicazione continua e surgettiva $f\colon X \to Y$ è una identificazione se e solo se i chiusi di Y sono tutti e soli i sottoinsiemi $A \subset Y$ tali che $f^{-1}(A)$ è chiuso in X.

Un altro modo di descrivere le identificazioni è il seguente. Sia $f\colon X \to Y$ un'applicazione continua; ricordiamo (vedi pagina 1) che un sottoinsieme $A \subset X$ si dice saturo rispetto a f (o anche f-saturo) se ogniqualvolta $x \in A$, $y \in X$ e $f(x) = f(y)$, allora $y \in A$. Equivalentemente A è f-saturo se è del tipo $f^{-1}(B)$ per qualche $B \subset Y$.

Dire che f è una identificazione equivale a dire che gli aperti di Y sono tutti e soli gli insiemi della forma $f(A)$, al variare di A tra gli aperti saturi di X. Per prevenire un errore comune, osserviamo che non tutti gli aperti di X sono saturi e quindi non è detto che le identificazioni siano applicazioni aperte.

Definizione 16.2. Una **identificazione chiusa** è una identificazione che è anche un'applicazione chiusa. Una **identificazione aperta** è una identificazione che è anche un'applicazione aperta.

Lemma 16.3. *Sia $f\colon X \to Y$ un'applicazione continua.*
Se f è chiusa ed surgettiva, allora f è una identificazione chiusa.
Se f è aperta ed surgettiva, allora f è una identificazione aperta.

Dimostrazione. Basta osservare che vale $f(f^{-1}(A)) = A$ per ogni sottoinsieme $A \subset Y$. $\square$

Esempio 16.4. L'applicazione continua

$$f\colon [0, 2\pi] \to S^1 = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 1\}, \qquad x \mapsto (\cos(x), \mathrm{sen}(x)),$$

è una identificazione chiusa. Infatti è continua e surgettiva da un compatto in un Hausdorff. Se volessimo dimostrare direttamente che f è chiusa, si può osservare che le due restrizioni

$$f\colon [0, \pi] \to S^1 \cap \{y \geq 0\}, \qquad f\colon [\pi, 2\pi] \to S^1 \cap \{y \leq 0\},$$

sono omeomorfismi e quindi, se $C \subset [0, 2\pi]$ è un sottoinsieme chiuso, allora $f(C) \cap \{y \geq 0\} = f(C \cap [0, \pi])$ e $f(C) \cap \{y \leq 0\} = f(C \cap [\pi, 2\pi])$ sono entrambi chiusi e dunque anche $f(C)$ è chiuso. Osserviamo che f non è un'applicazione aperta, infatti $[0, 1[$ è aperto in $[0, 2\pi]$ ma la sua immagine in S^1 non è aperta. Questo dovrebbe *stroncare sul nascere* qualunque tentazione di pensare che le identificazioni siano tutte aperte.

Lemma 16.5 (Proprietà universale delle identificazioni)**.** *Siano $f\colon X \to Y$ una identificazione e $g\colon X \to Z$ un'applicazione continua. Allora esiste un'applicazione continua $h\colon Y \to Z$ tale che $g = hf$ se e solo se g è costante sulle fibre di f.*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"'] & Z \\ Y \arrow[ur, dashed, "h"'] & \end{tikzcd}$$

Dimostrazione. Dire che g è costante sulle fibre di f significa dire che se $x, y \in X$ e $f(x) = f(y)$, allora $g(x) = g(y)$. Tale condizione è chiaramente necessaria per l'esistenza di h; proviamo che è anche sufficiente.

Siccome f è surgettiva, possiamo definire $h\colon Y \to Z$ come $h(y) = g(x)$, dove $x \in X$ è un qualsiasi punto tale che $f(x) = y$; per ipotesi h è ben definita e vale $g = hf$: bisogna solamente dimostrare che è continua. Se $U \subset Z$ è un aperto allora $f^{-1}(h^{-1}(U)) = g^{-1}(U)$ è aperto in X e, siccome f è una identificazione ne segue che $h^{-1}(U)$ è aperto in Y. □

Esempio 16.6. Pensiamo $S^n = \{(y, x) \in [0, 2] \times D^n \mid (y-1)^2 + \|x\|^2 = 1\}$ e consideriamo l'applicazione

$$f\colon D^n \to S^n, \qquad f(x) = (2\|x\|^2, 2x\sqrt{1 - \|x\|^2}).$$

Tale applicazione è continua e surgettiva. È iniettiva sul disco aperto $\{x \in D^n \mid \|x\| < 1\}$ e contrae il bordo $\partial D^n = S^{n-1}$ sul polo nord di S^n. Siccome D^n è compatto e S^n di Hausdorff, f risulta essere una identificazione chiusa.

Esercizio 16.7. Provare che la composizione di identificazioni è ancora una identificazione.

Esercizio 16.8. Siano $f\colon X \to Y$ una identificazione e $g\colon Y \to Z$ un'applicazione continua. Dimostrare che se $gf\colon X \to Z$ è una identificazione, allora anche g è una identificazione.

17. Topologia quoziente

Siano X uno spazio topologico, Y un insieme e $f\colon X \to Y$ un'applicazione surgettiva. Poiché f^{-1} commuta con le operazioni di unione ed intersezione, la famiglia dei sottoinsiemi $A \subset Y$ tali che $f^{-1}(A)$ è aperto in X, forma una topologia su Y. Tale topologia viene detta **topologia quoziente** rispetto ad f. Si noti che la topologia quoziente è l'unica topologia su Y che rende f una identificazione ed è la più fine tra quelle che rendono continua f.

Supponiamo di avere uno spazio topologico X ed una relazione di equivalenza $\sim$ in X. Denotiamo con $X/\!\sim$ l'insieme delle classi di equivalenza e con $\pi\colon X \to X/\!\sim$ l'applicazione surgettiva che ad ogni elemento $x \in X$ associa la sua classe di equivalenza $\pi(x) = [x]$. Lo spazio topologico $X/\!\sim$, dotato della topologia quoziente rispetto a π, viene detto **spazio quoziente**.

Proposizione 17.1. *Siano $f\colon X \to Y$ un'applicazione continua, $\sim$ una relazione di equivalenza su X e $\pi\colon X \to X/\!\sim$ la proiezione al quoziente. Allora esiste $g\colon X/\!\sim\, \to Y$ continua tale che $g\pi = f$ se e solo se f è costante sulle classi di equivalenza.*

Dimostrazione. Conseguenza immediata del Lemma 16.5. □

Esempio 17.2. Sia $f\colon X \to Y$ un'applicazione continua e consideriamo su X la relazione di equivalenza

$$\sim = \{(x, y) \in X \times X \mid f(x) = f(y)\}.$$

In altri termini, vale $x \sim y$ se e solo se $f(x) = f(y)$. Per la Proposizione 17.1, l'applicazione f induce al quoziente un'applicazione continua ed iniettiva $\overline{f}\colon X/\!\sim \to Y$. Segue immediatamente dalla definizione di topologia quoziente che f è una identificazione se e solo se $\overline{f}$ è un omeomorfismo.

Esempio 17.3. L'applicazione

$$f\colon S^{n-1} \times [0, 1] \to D^n, \qquad f(x, t) = tx,$$

è continua e surgettiva. Dato che $S^{n-1} \times [0, 1]$ è compatto e D^n di Hausdorff, ne segue che f è chiusa e quindi f è una identificazione. Dunque f induce un omeomorfismo tra D^n ed il quoziente di $S^{n-1} \times [0, 1]$ per la relazione di equivalenza che "contrae" $S^{n-1} \times \{0\}$ ad un punto.

Esempio 17.4. Il nastro di Moebius si ottiene prendendo una striscia rettangolare di materiale flessibile (carta, cuoio, sottile lamiera ecc.) ed incollando tra loro due lati opposti dopo aver fatto fare mezzo giro ad uno di essi. Topologicamente parlando il nastro di Moebius M si ottiene prendendo il quadrato $Q = [-1, 1] \times [-1, 1] \subset \mathbb{R}^2$ ed identificando il punto $(-1, y)$ con $(1, -y)$, per ogni $y \in [-1, 1]$. Se vogliamo essere più precisi, definiamo $M = Q/\!\sim$, dove

$$(x, y) \sim (x', y') \text{ se } (x, y) = (x', y') \text{ oppure se } \|x\| = 1,\ (x, y) = -(x', y').$$

Un caso particolare di quozienti sono quelli per gruppi di omeomorfismi. Sia X uno spazio topologico e denotiamo con $\mathrm{Omeo}(X)$ l'insieme di tutti gli omeomorfismi di X in sé. Con il prodotto di composizione, l'insieme $\mathrm{Omeo}(X)$ è un gruppo. Se $G \subset \mathrm{Omeo}(X)$ è un qualsiasi sottogruppo e definiamo

$$x \sim y \qquad \text{se esiste } g \in G \text{ tale che } y = g(x),$$

allora $\sim$ è una relazione di equivalenza su X e ed il relativo spazio quoziente viene indicato X/G.

Proposizione 17.5. *Sia $G \subset \mathrm{Omeo}(X)$ un gruppo di omeomorfismi di uno spazio topologico X e sia $\pi\colon X \to X/G$ la proiezione al quoziente. Allora π è un'applicazione aperta e, se G è finito, allora π è anche chiusa.*

Dimostrazione. Sia $A \subset X$ un sottoinsieme. Il suo saturato è $\pi^{-1}(\pi(A)) = \cup\{g(A) \mid g \in G\}$. Se A è aperto, allora $g(A)$ è aperto per ogni $g \in G$, dunque $\pi^{-1}(\pi(A))$ è aperto e, per definizione di topologia quoziente, ne consegue che $\pi(A)$ è aperto. Se G è finito si ripete lo stesso ragionamento con A chiuso. □

Osservazione 17.6. In generale il quoziente di uno spazio di Hausdorff non è di Hausdorff (vedi Esercizio 17.10). Se $f\colon X \to Z$ è una identificazione, allora Z è di Hausdorff se e solo se per ogni coppia di punti $x, y \in X$ tali che $f(x) \neq f(y)$ esistono intorni aperti saturi e disgiunti di x e y.

Proposizione 17.7. *Sia G un gruppo finito di omeomorfismi di uno spazio di Hausdorff X. Allora il quoziente X/G è di Hausdorff.*

Dimostrazione. Indichiamo con $\pi\colon X \to X/G$ la proiezione al quoziente e siano $x, y \in X$ tali che $\pi(x) \neq \pi(y)$. Indichiamo con $g_1, \ldots, g_n$ tutti gli elementi del gruppo finito G, con $x_1 = g_1(x), \ldots, x_n = g_n(x)$ l'orbita del punto x e con $y_1 = g_1(y), \ldots, y_n = g_n(y)$ l'orbita del punto y. La condizione che $\pi(x) \neq \pi(y)$ è equivalente a dire che $x_i \neq y_j$ per ogni $i, j = 1, \ldots, n$. Siccome X è di Hausdorff, esistono aperti $U_1, \ldots, U_n, V_1, \ldots, V_n$ tali che $x_i \in U_i$, $y_j \in V_j$ e $U_i \cap V_j = \emptyset$ per ogni i, j; definiamo

$$U = \cap\{g_i^{-1}(U_i) \mid i = 1, \ldots, n\}, \qquad V = \cap\{g_j^{-1}(V_j) \mid j = 1, \ldots, n\}.$$

Per costruzione $g_i(U) \subset U_i$, $g_j(V) \subset V_j$ e quindi

$$\pi^{-1}(\pi(U)) = \cup\{g_i(U) \mid i = 1, \ldots, n\}, \qquad \pi^{-1}(\pi(V)) = \cup\{g_i(V) \mid i = 1, \ldots, n\},$$

sono aperti disgiunti. □

In generale il quoziente di uno spazio di Hausdorff per l'azione di un gruppo infinito non è di Hausdorff (vedi Esercizio 17.9). Si ha tuttavia il seguente criterio.

Proposizione 17.8. *Sia G un gruppo di omeomorfismi di uno spazio di Hausdorff X. Allora il quoziente X/G è di Hausdorff se e solo se l'insieme*

$$K = \{(x, g(x)) \in X \times X \mid x \in X,\ g \in G\}$$

è chiuso nel prodotto.

Dimostrazione. La proiezione $\pi\colon X \to X/G$ è aperta, quindi anche l'applicazione

$$p\colon X \times X \to X/G \times X/G, \qquad p(x, y) = (\pi(x), \pi(y)),$$

è aperta e surgettiva ed è quindi è una identificazione. Notiamo che $p(x, y)$ appartiene alla diagonale Δ di $X/G \times X/G$ se e solo se x e y appartengono alla stessa orbita, ossia se e solo se $(x, y) \in K$. Ne segue che $p^{-1}(\Delta) = K$ e quindi Δ è chiusa se e solo se K è chiuso. □

Esercizio 17.9. Provare che per ogni intero $n > 0$, il quoziente $\mathbb{R}^n / \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ non è di Hausdorff.

Esercizio 17.10 (La lingua biforcuta)**.** Sia B un insieme con due elementi dotato della topologia discreta. Sullo spazio topologico $X = \mathbb{R} \times B$ definiamo

$$(x, a) \sim (y, b) \ \text{ se } \ (x, a) = (y, b) \text{ oppure se } x = y < 0.$$

Provare che $X/\!\sim$ è unione di due aperti omeomorfi a $\mathbb{R}$ e che non è di Hausdorff.

Esercizio 17.11 (Contrazioni)**.** Siano X uno spazio topologico di Hausdorff, $A \subset X$ un sottospazio compatto e definiamo

$$x \sim y \quad \text{se} \quad x = y \text{ oppure } x, y \in A.$$

Denotiamo con X/A il quoziente di X per la relazione $\sim$, ossia X/A è ottenuto da X contraendo A ad un punto. Dimostrare che:

(1) X/A è di Hausdorff.
(2) (proprietà di escissione) Sia K un aperto di X contenuto in A. Allora l'applicazione naturale $(X - K)/(A - K) \to X/A$ è un omeomorfismo.

Esercizio 17.12. Usare l'Esercizio 9.11 per una dimostrazione alternativa della Proposizione 17.7 come corollario della Proposizione 17.8.

18. Gli spazi proiettivi

Un importantissimo esempio di quoziente per gruppo di omeomorfismi è lo spazio proiettivo reale $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$. Per definizione $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ è il quoziente di $\mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$ per la relazione di equivalenza

$$\{x \sim \lambda x \mid \lambda \in \mathbb{R} - \{0\}\}$$

e quindi $\mathbb{P}^n(\mathbb{R}) = (\mathbb{R}^{n+1} - \{0\})/G$, dove G è il gruppo delle omotetie. Notiamo che $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ è in bigezione naturale con l'insieme dei sottospazi vettoriali di dimensione 1 di $\mathbb{R}^{n+1}$. Se $(x_0, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$, la sua classe di equivalenza in $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ viene indicata solitamente $[x_0, \ldots, x_n]$.

Poniamo su $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ la topologia quoziente: in tale topologia i sottospazi proiettivi sono chiusi. L'inclusione $i\colon S^n \to \mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$ induce una bigezione naturale tra $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ ed il quoziente di S^n per la relazione di equivalenza antipodale $x \sim y$ se e solo se $x = \pm y$. Per dimostrare che tale bigezione è un omeomorfismo consideriamo il seguente diagramma commutativo

$$\begin{tikzcd} S^n \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\pi'"] & \mathbb{R}^{n+1} - \{0\} \arrow[r, "r"] \arrow[d, "\pi"] & S^n \arrow[d, "\pi'"] \\ S^n/\sim \arrow[r, "f"] & \mathbb{P}^n(\mathbb{R}) \arrow[r, "f^{-1}"] & S^n/\sim \end{tikzcd} \quad , \qquad r(x) = \frac{x}{\|x\|}.$$

Poiché l'inclusione i e la retrazione r sono continue, anche le composizioni πi e $\pi' r$ sono continue e, per la Proposizione 17.1, le applicazioni f ed f^{-1} risultano continue, ossia f è un omeomorfismo. Quindi $\mathbb{P}^n(\mathbb{R}) = S^n/\sim$ e dalla Proposizione 17.7 segue che gli spazi proiettivi reali sono di Hausdorff.

Esempio 18.1. Consideriamo lo spazio topologico X ottenuto quozientando il disco bidimensionale $D^2 = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\| \leq 1\}$ per la relazione che identifica i punti del bordo opposti: per meglio dire $X = D^2/\sim$, dove

$$x \sim y \quad \text{se} \quad x = y \quad \text{oppure se} \quad \|x\| = \|y\| = 1,\ x = -y.$$

Vogliamo mostrare che X è omeomorfo al piano proiettivo reale $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$. Per iniziare identifichiamo il disco D^2 con la calotta sferica superiore

$$S^2_+ = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1,\ z \geq 0\} \subset S^2$$

tramite l'omeomorfismo $S^2_+ \to D^2$ dato da $(x, y, z) \mapsto (x, y)$. Lo spazio X è quindi omeomorfo a $S^2_+/\sim$, dove $\sim$ è la relazione che identifica il punto $(x, y, 0) \in S^2_+$ con il suo antipodo $(-x, -y, 0)$. Denotando con $i\colon S^2_+ \to S^2$ l'inclusione e con $\pi\colon S^2 \to \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$, $p\colon S^2_+ \to X$ le proiezioni al quoziente, abbiamo un diagramma commutativo di applicazioni continue

$$\begin{tikzcd} S^2_+ \arrow[r, "i"] \arrow[d, "p"] & S^2 \arrow[d, "\pi"] \\ X \arrow[r, "j"] & \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \end{tikzcd}$$

L'applicazione j è inoltre bigettiva. Vogliamo dimostrare che è chiusa e di conseguenza un omeomorfismo. Sia $C \subset X$ un chiuso. Allora $B = p^{-1}(C)$ è chiuso in S^2_+ e, poiché S^2_+ è chiuso in S^2, si ha che B è chiuso anche in S^2. Siccome $\pi^{-1}(j(C)) = B \cup -B$, dove $-B$ è l'immagine di B tramite l'applicazione antipodale in S^2, si ha che $\pi^{-1}(j(C))$ è chiuso e quindi che $j(C)$ è chiuso.

Alla stessa conclusione potevamo arrivare più rapidamente osservando che, per la Proposizione 17.5 la proiezione π è chiusa, di conseguenza l'applicazione $S^2_+ \to \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ è chiusa e surgettiva e per il Lemma 16.3 è una identificazione.

Gli spazi proiettivi complessi si definiscono in modo del tutto simile a quelli reali. Per definizione $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ è il quoziente di $\mathbb{C}^{n+1} - \{0\}$ per la relazione di equivalenza

$$\{x \sim \lambda x \mid \lambda \in \mathbb{C} - \{0\}\}$$

e quindi $\mathbb{P}^n(\mathbb{C}) = (\mathbb{C}^{n+1} - \{0\})/G$, dove G è il gruppo delle omotetie complesse. Poniamo quindi su $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ la topologia quoziente. Identificando, per ogni $n \geq 0$, la sfera S^{2n+1} con l'insieme dei vettori di $\mathbb{C}^{n+1}$ di norma 1, l'inclusione $S^{2n+1} \subset \mathbb{C}^{n+1} - \{0\}$ induce una bigezione naturale tra $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ ed il quoziente di S^{2n+1} per la relazione di equivalenza

$$\{x \sim \lambda x \mid \lambda \in S^1 \subset \mathbb{C} - \{0\}\}.$$

Proposizione 18.2. *Gli spazi proiettivi, reali e complessi, sono spazi topologici connessi, compatti e di Hausdorff.*

Dimostrazione. Le applicazioni di proiezione

$$S^n \to \mathbb{P}^n(\mathbb{R}), \qquad S^{2n+1} = \{z \in \mathbb{C}^{n+1} \mid \|z\| = 1\} \to \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$$

sono continue e surgettive; questo prova che gli spazi proiettivi sono compatti e connessi. Abbiamo già dimostrato che gli spazi proiettivi reali sono di Hausdorff, consideriamo quindi il caso complesso. Per la Proposizione 17.8, lo spazio $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ è di Hausdorff se e solo se

$$K = \{(x,y) \in (\mathbb{C}^{n+1} - \{0\}) \times (\mathbb{C}^{n+1} - \{0\}) \mid x = \lambda y\}$$

è chiuso. Interpretando ogni elemento di $\mathbb{C}^{n+1}$ come un vettore colonna, si ha che $(\mathbb{C}^{n+1} - \{0\}) \times (\mathbb{C}^{n+1} - \{0\})$ coincide con lo spazio delle matrici $(n+1) \times 2$ con entrambe le colonne non nulle e di conseguenza K corrisponde all'intersezione di $(\mathbb{C}^{n+1} - \{0\}) \times (\mathbb{C}^{n+1} - \{0\})$ con l'insieme delle matrici di rango 1. Tale insieme è chiuso in quanto è definito dall'annullarsi dei determinanti minori di ordine 2. □

Esercizio 18.3. Verificare che l'applicazione $\mathbb{P}^1(\mathbb{R}) \to S^1$,

$$[x_0, x_1] \mapsto \left(\frac{x_0^2 - x_1^2}{x_0^2 + x_1^2}, \frac{2x_0x_1}{x_0^2 + x_1^2}\right)$$

è un omeomorfismo.

Esercizio 18.4. Verificare che l'applicazione $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \to S^2$,

$$[z_0, z_1] \mapsto \left(\frac{|z_0|^2 - |z_1|^2}{|z_0|^2 + |z_1|^2}, \frac{\overline{z}_0 z_1 - \overline{z}_1 z_0}{|z_0|^2 + |z_1|^2}, \frac{\overline{z}_0 z_1 + \overline{z}_1 z_0}{|z_0|^2 + |z_1|^2}\right)$$

è un omeomorfismo.

19. Spazi localmente ...

Uno spazio topologico si dice **localmente connesso** se ogni punto possiede un sistema fondamentale di intorni connessi.

Segue dal Lemma 12.8 che negli spazi localmente connessi le componenti connesse sono aperte. In generale uno spazio connesso può non essere localmente connesso: si consideri ad esempio il sottoispazio di $\mathbb{R}^2$ formato dai punti (x, y) tali che $x \in \mathbb{Q}$ oppure $y \in \mathbb{Z}$.

Gli aperti di $\mathbb{R}^n$ sono tutti localmente connessi. Il prodotto di due spazi localmente connessi è ancora localmente connesso.

Uno spazio topologico si dice **localmente compatto** se ogni suo punto possiede un intorno compatto. Ad esempio, ogni aperto di $\mathbb{R}^n$ è localmente compatto. Un sottoinsieme chiuso di uno spazio localmente compatto è localmente compatto ed il prodotto di due spazi localmente compatti è ancora localmente compatto.

Lemma 19.1. *In uno spazio topologico di Hausdorff localmente compatto ogni punto possiede un sistema fondamentale di intorni compatti.*

Dimostrazione. Sia $x \in X$ un punto e K un suo intorno compatto. Per il Corollario 15.7, il punto x ammette un sistema fondamentale di intorni compatti in K e, poiché K è un intorno di x in X, tale sistema è fondamentale anche in X. $\square$

20. Incollamenti

Un modo comune di costruire nuovi spazi topologici è tramite **incollamento**. Siano X, Y spazi topologici, $V \subset Y$ un sottoinsieme e $f\colon V \to X$ un'applicazione continua. Definiamo un nuovo spazio topologico $X \cup_f Y$ come il quoziente dell'unione disgiunta $X \cup Y$ per la relazione di equivalenza generata da $p \sim q$ se $p \in V$ e $f(p) = q$. Diremo che $X \cup_f Y$ è ottenuto **incollando Y a X** tramite la **funzione di incollamento f**.

Osserviamo che l'applicazione naturale $i\colon X \to X \cup_f Y$ è iniettiva. Inoltre se V è aperto (risp.: chiuso) in Y allora i è una immersione aperta (risp.: chiusa): infatti, denotando con $\pi\colon X \cup Y \to X \cup_f Y$ la proiezione al quoziente, per ogni sottoinsieme $A \subset X$ vale $\pi^{-1}(i(A)) = A \cup f^{-1}(A)$ e quindi se A, V sono aperti allora $\pi^{-1}i(A)$ è aperto, se A, V sono chiusi allora $\pi^{-1}(i(A))$ è chiuso.

Un caso particolare è quando f è un omeomorfismo tra due aperti. Stavolta entrambe le applicazioni $X \to X \cup_f Y$ e $Y \to X \cup_f Y$ sono immersioni aperte e, se X e Y sono localmente omeomorfi ad aperti di $\mathbb{R}^n$, lo stesso si può dire per $X \cup_f Y$. L'esempio della lingua biforcuta (Esercizio 17.10) mostra che $X \cup_f Y$ può non essere di Hausdorff anche se X e Y lo sono.

Osservazione 20.1. Se X e Y sono spazi metrici, in generale non è affatto chiaro se e come $X \cup_f Y$ è uno spazio metrico. Storicamente, questa è stata una delle principali motivazioni all'introduzione delle strutture topologiche.

Esercizio 20.2 (Trapianti)**.** Sia X uno spazio topologico, $U \subset X$ un aperto, $K \subset U$ chiuso in X. Sia poi $f\colon Y \to U$ un'applicazione continua e denotiamo con $g\colon Y - f^{-1}(K) \to U - K$ la restrizione di f. Si assuma che g sia un omeomorfismo. Lo spazio topologico $(X - K) \cup_g Y$ è ottenuto trapiantando $f^{-1}(K)$ al posto di K. Dimostrare che se X, Y sono di Hausdorff allora anche $(X - K) \cup_g Y$ è di Hausdorff.

Esercizio 20.3 (Attaccamento di celle)**.** Per ogni applicazione continua $f\colon S^{n-1} \to X$, diremo che lo spazio $Y = X \cup_f D^n$ è ottenuto da X per attaccamento di una cella n-dimensionale. Provare che se X è di Hausdorff allora anche Y è di Hausdorff.

Esercizio 20.4 $(*)$**.** Consideriamo una famiglia di copie disgiunte $\mathbb{R}_a$ della retta reale indicizzate da $a \in]-\pi/2, \pi/2[$ e lo spazio topologico X ottenuto incollando a $\mathbb{R}^2$ tutte le strisce $\mathbb{R}_a \times]-1,1[$ mediante le funzioni di incollamento

$$f_a\colon (\mathbb{R}_a - \{0\}) \times]-1,1[\to \mathbb{R}^2, \qquad (x,y) \mapsto \left(\frac{\cos(a)}{x} - y\,\mathrm{sen}(a), \frac{\mathrm{sen}(a)}{x} + y\cos(a)\right).$$

Dimostrare che:

(1) X è connesso, di Hausdorff e localmente omeomorfo ad aperti di $\mathbb{R}^2$.
(2) X è separabile ma non è a base numerabile.

Riferimenti bibliografici

[1] M. Manetti: *Topologia.* Springer Unitext **32** (2008).