CURVE IN $\mathbb{R}^3$: ESERCIZI E COMPLEMENTI

MARCO MANETTI

Dati tre vettori in $\mathbb{R}^3$

$$a=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix},\quad b=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix},\quad c=\begin{pmatrix}c_1\\c_2\\c_3\end{pmatrix},$$

denoteremo

$$|a,b,c|=\det(a,b,c)=\det\begin{pmatrix}a_1&b_1&c_1\\a_2&b_2&c_2\\a_3&b_3&c_3\end{pmatrix}$$

Ricordiamo la definizione del prodotto scalare

$$a\cdot b=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3\in\mathbb{R}.$$

Il **prodotto vettoriale** $a\wedge b\in\mathbb{R}^3$ è univocamente determinato dalla proprietà

$$(a\wedge b)\cdot c=|a,b,c|,\qquad \forall c\in\mathbb{R}^3.$$

Notiamo che:

(1)
$$a\wedge b=\begin{pmatrix}a_2b_3-a_3b_2\\a_3b_1-a_1b_3\\a_1b_2-a_2b_1\end{pmatrix}$$

(2) $a\wedge b\neq 0$ se e solo se a,b sono linearmente indipendenti.
(3) $a\wedge b=-b\wedge a$
(4) $(a\wedge b)\cdot a=(a\wedge b)\cdot b=0$.
(5) $(a\wedge b)\cdot c=(b\wedge c)\cdot a=(c\wedge a)\cdot b$.
(6) $\|a\wedge b\|^2=|a,b,a\wedge b|=\|a\|^2\|b\|^2-(a\cdot b)^2$.

Dunque $a\wedge b$ è un vettore perpendicolare ad a e b e di lunghezza uguale al prodotto delle norme di a e b per il seno dell'angolo compreso.

I prodotti scalare e vettoriale sono entrambi bilineari, simmetrico il primo, alternante il secondo. In particolare, se $\alpha,\beta\colon\,]r,s[\to\mathbb{R}^3$ sono due applicazioni differenziabili, allora vale

$$\frac{d}{dt}(a(t)\cdot b(t))=\frac{da}{dt}(t)\cdot b(t)+a(t)\cdot\frac{db}{dt}(t),$$

$$\frac{d}{dt}(a(t)\wedge b(t))=\frac{da}{dt}(t)\wedge b(t)+a(t)\wedge\frac{db}{dt}(t).$$

0.1. **Esercizio.** Siano a,b due vettori di norma 1. Provare che $a\wedge b=c$ se e solo se la matrice (a,b,c) è speciale ortogonale.

0.2. **Esercizio.** Sia E una matrice ortogonale. Provare che per ogni $a,b\in\mathbb{R}^3$ valgono le formule

$$(Ea)\cdot(Eb)=a\cdot b,\qquad (Ea)\wedge(Eb)=\det(E)E(a\wedge b).$$

Date: Versione preliminare, 1 dicembre 2008.

0.3. **Esercizio.** Sia $\alpha\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ una curva. Dimostrare che, per ogni $k > 0$, il sottospazio vettoriale generato da $\alpha', \alpha'', \dots, \alpha^{(k)}$ è indipendente dalla parametrizzazione.

0.4. **Definizione.** Una curva $\alpha\colon I \to \mathbb{R}^3$ si dice sghemba se la matrice

$$(\alpha', \alpha'', \alpha''')$$

è invertibile per ogni $t \in I$.

0.5. **Esercizio.** Dimostrare che la definizione di curva sghemba non dipende dalla parametrizzazione scelta.

Supponiamo adesso che la curva $\alpha\colon I \to \mathbb{R}^3$ sia parametrizzata in lunghezza d'arco. Si definisce il *versore tangente*

$$\mathbf{t} = \alpha'.$$

Derivando la relazione $\mathbf{t} \cdot \mathbf{t} = 1$ si ottiene $\mathbf{t}' \cdot \mathbf{t} = 0$ e quindi se $\mathbf{t}' \neq 0$ si può scrivere

$$\mathbf{t}' = k\mathbf{n}$$

con $k > 0$ e $\mathbf{n}$ versore perpendicolare a $\mathbf{t}$.

0.6. **Definizione.** Chiameremo $\mathbf{n}$ *versore normale*, k *curvatura* e $\mathbf{b} = \mathbf{t} \wedge \mathbf{n}$ *versore binormale*.

Derivando le relazioni $\mathbf{n} \cdot \mathbf{n} = 1$, $\mathbf{n} \cdot \mathbf{t} = 0$ si ottiene

$$\mathbf{n}' \cdot \mathbf{n} = 0, \qquad \mathbf{n}' \cdot \mathbf{t} = -\mathbf{n} \cdot \mathbf{t}' = -k$$

e quindi si può scrivere

$$\mathbf{n}' = -k\mathbf{t} + \tau\mathbf{b}$$

per qualche $\tau \in \mathbb{R}$ detto *torsione*. Notiamo che τ coincide con la componenente della derivata di $\mathbf{n}$ perpendicolare al moto. Notiamo che, supponendo α parametrizzata in lunghezza d'arco si ha

$$\alpha'' = k\mathbf{n}, \qquad \alpha''' = k'\mathbf{n} + k\mathbf{n}' = k'\mathbf{n} - k^2\mathbf{t} + k\tau\mathbf{b},$$

e quindi

$$(\alpha', \alpha'', \alpha''') = (\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}) \begin{pmatrix} 1 & 0 & -k^2 \\ 0 & k & k' \\ 0 & 0 & k\tau \end{pmatrix}$$

Infine derivando le relazioni $\mathbf{b} \cdot \mathbf{b} = 1$, $\mathbf{b} \cdot \mathbf{n} = 0$ e $\mathbf{b} \cdot \mathbf{t} = 0$ si ottiene facilmente $\mathbf{b}' = -\tau\mathbf{n}$ e quindi

$$(\mathbf{t}', \mathbf{n}', \mathbf{b}') = (\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}) \begin{pmatrix} 0 & -k & 0 \\ k & 0 & -\tau \\ 0 & \tau & 0 \end{pmatrix}$$

0.7. **Esercizio** (vettore di Darboux)**.** Sia $\alpha\colon I \to \mathbb{R}^3$ una curva sghemba. Determinare un'applicazione $\mathbf{d}\colon I \to \mathbb{R}^3$ tale che

$$\mathbf{t}' = \mathbf{d} \wedge \mathbf{t}, \qquad \mathbf{n}' = \mathbf{d} \wedge \mathbf{n}, \qquad \mathbf{b}' = \mathbf{d} \wedge \mathbf{b}.$$

Vogliamo adesso trovare la sfera di $\mathbb{R}^3$ avente massimo contatto con la curva α nel punto 0. Possiamo supporre che α sia parametrizzata in lunghezza d'arco s, che $\alpha(0) = 0$ e che il riferimento mobile di Frenet coincida con gli assi coordinati nello 0. Abbiamo quindi

$$(\alpha', \alpha'', \alpha''') = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -k^2 \\ 0 & k & k' \\ 0 & 0 & k\tau \end{pmatrix}$$

e quindi si ha lo sviluppo di Taylor

$$\alpha(s) = \begin{pmatrix} s - \frac{k^2}{6}s^3 \\ \frac{k}{2}s^2 + \frac{k'}{6}s^3 \\ \frac{k\tau}{6}s^3 \end{pmatrix} + o(s^3)$$

L'equazione di una generica sfera passante per 0 è $f = 0$, dove

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2bz.$$

Se vogliamo che $f(\alpha(s)) = o(s^3)$ deve ovviamente essere $a = 0$ e quindi

$$f(\alpha(s)) = s^2 - bks^2 - \frac{bk'}{3}s^3 - c\frac{ck\tau}{3} + o(s^3)$$

da cui si deduce che

$$b = \frac{1}{k}, \qquad c = -\frac{k'}{k^2\tau}.$$

Il centro $o = (a, b, c)$ ed il quadrato del raggio della sfera osculatrice sono dunque

$$o = \alpha + \frac{\mathbf{n}}{k} - \frac{k'\mathbf{b}}{k^2\tau}, \qquad r^2 = a^2 + b^2 + c^2 = \frac{1}{k^2} + \left(\frac{k'}{k^2\tau}\right)^2.$$

In particolare se α è contenuta in una sfera di raggio r allora la quantità $r^2 = \frac{1}{k^2} + \left(\frac{k'}{k^2\tau}\right)^2$ è costante.

Dimostriamo adesso il (quasi) viceversa, ossia che se $k' \neq 0$ e $\frac{1}{k^2} + \left(\frac{k'}{k^2\tau}\right)^2$ è costante, allora α è contenuta in una sfera. Abbiamo già dimostrato che le sfere osculatrici hanno tutte lo stesso raggio; basta dimostrare che hanno tutte lo stesso centro, ossia che $o' = 0$.

Si ha

$$o' = \mathbf{t} + \frac{\mathbf{n}'}{k} - \frac{k'}{k^2}\mathbf{n} - \frac{k'}{k^2\tau}\mathbf{b}' - \left(\frac{k'}{k^2\tau}\right)'\mathbf{b}$$

ed usando le formule di Frenet $\mathbf{n}' = -k\mathbf{t} + \tau\mathbf{b}$, $\mathbf{b}' = -\tau\mathbf{n}$ si ottiene

$$o' = \frac{\tau}{k}\mathbf{b} - \left(\frac{k'}{k^2\tau}\right)'\mathbf{b}.$$

Derivando la costante $\frac{1}{k^2} + \left(\frac{k'}{k^2\tau}\right)^2$ si ottiene

$$-2\frac{k'}{k^3} + 2\left(\frac{k'}{k^2\tau}\right)\left(\frac{k'}{k^2\tau}\right)' = 0$$

e quindi

$$\left(\frac{k'}{k^2\tau}\right)' = \frac{\tau}{k} \quad \Rightarrow \quad o' = 0.$$

0.8. **Lemma.** *Per una curva sghemba $\alpha(s)$ in $\mathbb{R}^3$ parametrizzata in lunghezza d'arco le seguenti condizioni sono equivalenti:*

1. *α è un'elica generale, ossia il versore tangente forma un angolo costante con una determinata direzione.*
2. *La curva $\beta(s) = \alpha(s) - s\mathbf{t}$ è piana.*
3. *Il rapporto fra torsione e curvatura è costante.*

Dimostrazione. [1 ⇒ 2] sia v un vettore non nullo tale che $v \cdot \mathbf{t}$ sia costante. Allora $0 = (\mathbf{t} \cdot v)' = \mathbf{t}' \cdot v$ e

$$(\beta \cdot v)' = \beta' \cdot v = (\mathbf{t} - \mathbf{t} + s\mathbf{t}') \cdot v = 0$$

e quindi la curva β è contenuta nel piano $x \cdot v = cost.$

[2 ⇒ 1] Se β è contenuta nel piano $x \cdot v = cost$, allora $s\mathbf{t}' \cdot v = 0$ da cui segue che $\mathbf{t} \cdot v$ è costante.

[1 ⇒ 3] Abbiamo già visto che $0 = \mathbf{t}' \cdot v = k\mathbf{n} \cdot v$; quindi $\mathbf{n} \cdot v = 0$ ed i vettori v e $\mathbf{n}$ sono linearmente indipendenti. Derivando ancora

$$0 = \mathbf{n}' \cdot v = -k\mathbf{t} \cdot v + \tau\mathbf{b} \cdot v.$$

D'altra parte $\|v\|^2 = (\mathbf{t} \cdot v)^2 + (\mathbf{n} \cdot v)^2 + (\mathbf{b} \cdot v)^2$ è costante e quindi $\mathbf{b} \cdot v$ è costante e

$$\frac{\tau}{k} = \frac{\mathbf{t} \cdot v}{\mathbf{b} \cdot v}$$

[3 ⇒ 1] Se supponiamo $\tau = ak$ con a costante, allora $(\mathbf{b} + a\mathbf{t})' = (-\tau + ak)\mathbf{n} = 0$, ossia il vettore $v = \mathbf{b} + a\mathbf{t}$ è costante e $\mathbf{t} \cdot v = a$. □

0.9. **Esercizio.** Calcolare la curvatura nel punto $(0, 0, 1)$ della curva di equazione

$$x^2 + y^2 + z^2 = (x - 1)^2 + y^2 = 1.$$

0.10. **Esercizio.** Dimostrare che se tutte le rette normali passano per un punto fissato, allora la curva è un cerchio.

0.11. **Esercizio.** Calcolare la curvatura della spirale logaritmica:

$$\alpha(t) = (e^{at} \cos t, e^{at} \sin t).$$

0.12. **Esercizio.** Data la curva piana

$$t \mapsto (t, f(t)), \qquad f > 0,$$

dimostrare che, per $t = 0$, il centro del raggio di curvtura appartiene all'asse $y = 0$ se e solo se $1 + f'(0)^2 + f(0)f''(0) = 0$.