ESERCIZI DI GEOMETRIA DIFFERENZIALE DEL 6 NOVEMBRE 2008

Esercizio 1. Sia X varietà e $f\colon X \to X$ differenziabile. Mostrare che il grafico di f è trasversale alla diagonale in $X \times X$ se e solo se per ogni punto fisso x di f l'applicazione $Df - I\colon T_xX \to T_xX$ è invertibile.

Esercizio 2. Siano $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ applicazioni differenziabili e $W \subset Z$ una sottovarietà trasversale a g. Dimostrare che W è trasversale a gf se e solo se $g^{-1}(W)$ è trasversale a f.

Esercizio 3 (Teorema di Bertini[1])**.** Siano $f_1, \dots, f_m$ funzioni C^∞ su $\mathbb{R}^n$ con la proprietà che per ogni punto $p \in \mathbb{R}^n$ tale che $f_1(p) = \cdots = f_m(p) = 0$ esiste una coppia di indici i, j tali che
$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(p) \neq 0.$$
Denotiamo con $U \subset \mathbb{R}^m$ l'insieme delle m-uple $(t_1, \dots, t_m)$ tali che il luogo
$$\{x \in \mathbb{R}^n \mid \sum t_i f_i(x) = 0\}$$
sia una sottovarietà. Dimostrare che U è denso in $\mathbb{R}^m$ (sugg.: teorema di trasversalità).

Esercizio 4. Indichiamo con $G(k, \mathbb{R}^n)$ la Grassmanniana dei sottospazi di dimensone k di $\mathbb{R}^n$. Dimostrare che l'applicazone
$$G(k, \mathbb{R}^n) \to G(n-k, \mathbb{R}^n), \qquad V \mapsto V^\perp,$$
è un diffeomorfismo.

Esercizio 5. Sia $X \subset \mathbb{R}^n$ una sottovarietà di dimensione k. Dimostrare che l'applicazione
$$X \to G(k, \mathbb{R}^n), \qquad p \mapsto T_pX,$$
è di classe C^∞.

Esercizio 6 (Fibrato Normale)**.** Sia $X \subset \mathbb{R}^n$ una sottovarietà di dimensione k. Dimostrare che
$$N_X = \{(p, v) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \mid p \in X, v \in (T_pX)^\perp\}$$
è una sottovarietà di dimensione n e che per ogni $p \in X$ l'applicazione
$$N_X \to \mathbb{R}^n, \qquad (x, v) \mapsto x + v$$
ha rango massimo in $(p, 0)$.

Esercizio 7 (Teorema dell'intorno tubolare)**.** Sia $X \subset \mathbb{R}^n$ una sottovarietà compatta di dimensione k. Per ogni $r > 0$ denotiamo
$$N_X(r) = \{(p, v) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \mid p \in X, v \in (T_pX)^\perp, \|v\| < r\}.$$
Dimostrare che per r sufficientemente piccolo l'applicazione
$$N_X(r) \to \mathbb{R}^n, \qquad (x, v) \mapsto x + v$$
è iniettiva, aperta ed è un diffeomorfismo sull'immagine. Dedurre che esiste un aperto $U \subset \mathbb{R}^n$ che contiene X ed un'applicazione differenziabile $r\colon U \times [0, 1] \to U$ tale che $r(x, 0) = x$ per ogni $x \in U$, $r(x, 1) \in X$ per ogni $x \in U$ e $r(x, t) = x$ per ogni $x \in X$, $t \in [0, 1]$.

Esercizio 8. Siano $X \subset \mathbb{R}^n$ e $Y \subset \mathbb{R}^m$ due sottovarietà compatte. Dimostrare che ogni applicazione continua $f\colon X \to Y$ è omotopa ad un'applicazione differenziabile $g\colon X \to Y$ (sugg.: Stone-Weierstrass e intorno tubolare).

[1] Eugenio Bertini (Forlì, 8 novembre 1846 - Pisa, 24 febbraio 1933) è stato un matematico italiano considerato uno dei fondatori della scuola italiana di geometria algebrica.