Università di Roma "La Sapienza"; corso di Geometria Analitica, tutoraggio del 27 Novembre 2007: E.A., M.M. e A.F.

Esercizio 1. Trovare una base unitaria del sottospazio $H \subset \mathbb{C}^3$ di equazione

$$x - iy + z = 0, \qquad i = \sqrt{-1}.$$

Esercizio 2. Trovare la radice quadrata e una base unitaria di autovettori per la matrice Hermitiana

$$\begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 3. Trovare una base unitaria di autovettori per la matrice Hermitiana

$$\begin{pmatrix} 1 & 6i \\ -6i & 4 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 4. Trovare le matrici unitarie che commutano con

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 5. Sia G il gruppo delle proiettività di $\mathbb{P}^2$. Classificare le orbite dell'azione

$$G \times (\mathbb{P}^2)^3 \to (\mathbb{P}^2)^3, \qquad \phi(p, q, r) = (\phi p, \phi q, \phi r).$$

Esercizio 6. Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{C}$ e sia $\phi\colon V \times V \to \mathbb{C}$ una forma Hermitiana. Si supponga che ϕ sia $\mathbb{C}$-lineare sulla prima variabile e si scriva $\phi = s + ia$, dove $s, a\colon V \times V \to \mathbb{R}$ sono rispettivamente la parte reale ed immaginaria di ϕ. Dimostrare che:

(1) s è simmetrica ed a è antisimmetrica.
(2) $a(x, y) = s(x, iy)$, $s(ix, iy) = s(x, y)$ per ogni x, y.
(3) Sia $s\colon V \times V \to \mathbb{R}$ una forma bilineare su $\mathbb{R}$, allora $\phi(x, y) = s(x, y) + is(x, iy)$ è Hermitiana se e solo se $s(ix, iy) = s(x, y)$ per ogni x, y.

Esercizio 7. Sia $L \in M_{n,n}(\mathbb{C})$; mostrare che L si decompone in modo unico nella forma $L = H + iK$ con H, K hermitiane.

Si supponga adesso che nella decomposizione precedente H sia definita positiva. Si dimostri che $|\det L| \geq \det H$. Quando vale l'eguaglianza?

Esercizio 8. Sia $A = (a_{ij}) \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ e si assuma che esistano $b_1, \ldots, b_n > 0$ tali che $b_i a_{ij} = b_j a_{ji}$ per ogni i, j. Dimostrare che A è diagonalizzabile.