

Esercizio 1. Si dimostri che una matrice A è congruente a una matrice diagonale se e solo se A è simmetrica.

Esercizio 2. Calcolare rango e segnatura della forma quadratica

$$\Phi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, \quad \Phi(x) = x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 + 12x_1x_3 + 78x_2x_3.$$

Esercizio 3. Calcolare rango e segnatura della forma quadratica

$$\Phi: \mathbb{R}^{350} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \Phi(x) = (x_1 + 2x_2 + 3x_3 + \dots + 350x_{350})^2.$$

Esercizio 4. Si consideri la forma quadratica in \mathbb{R}^3 definita da

$$\Phi(x) = 2x_1x_2 + 6x_2x_3$$

a) Se ne calcoli rango e segnatura.

b) Si trovi una base di \mathbb{R}^3 in cui Φ è scritta in forma canonica

Esercizio 5. Calcolare rango e segnatura della forma quadratica

$$\Phi: M_{2,2}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}, \quad \Phi(A) = \det(A).$$

Esercizio 6. Calcolare rango e segnatura della forma quadratica

$$\Phi: \mathbb{R}^{350} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \Phi(x) = (x_1 + 2x_2 + 3x_3 + \dots + 350x_{350})^2 - x_1^2.$$

Esercizio 7. Data una matrice quadrata $A = (a_{ij})$ verificare la formula

$$\text{traccia}({}^tAA) = \sum_{i,j} a_{ij}^2$$

e calcolare rango e segnatura della forma quadratica

$$\Phi: M_{n,n}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}, \quad \Phi(A) = \text{traccia}(A^2).$$

Esercizio 8. Sia A una matrice simmetrica definita positiva. Si dimostri che vi è una matrice triangolare superiore T tale che $A = {}^tTT$

Esercizio 9. Sia $\Phi: V \rightarrow \mathbb{R}$ una forma quadratica di rango massimo e indefinita (ossia tale che $\Phi(v) > 0$ e $\Phi(w) < 0$ per qualche $v, w \in V$). Dimostrare che in una opportuna base la forma Φ si rappresenta con una matrice simmetrica con coefficienti nulli sulla diagonale.

Esercizio 10. Calcolare rango e segnatura della forma quadratica

$$\Phi: \mathbb{R}^{350} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \Phi(x) = \sum_{i=2}^{350} (2x_1x_i + x_i^2).$$

Esercizio 11 (*). Sia $\varphi: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ una forma bilineare con la proprietà che

$$\varphi(x, y) = 0 \quad \text{se e solo se} \quad \varphi(y, x) = 0.$$

Dimostrare che φ è simmetrica oppure antisimmetrica.