Università di Roma "La Sapienza"; corso di Geometria Analitica, tutoraggio del 11 Dicembre 2007: E.A., M.M. e A.F.

Esercizio 1. Siano X uno spazio topologico, $f\colon X \to X$ continua e $C \subset X$ un sottoinsieme chiuso. Dimostrare che $\{x \in X \mid f^n(x) \in C \text{ per ogni } n > 0\}$ è chiuso in X.

Esercizio 2. Siano X, Y spazi topologici e $\Gamma \subset X \times Y$ il grafico di un'applicazione continua $f\colon X \to Y$:

$$\Gamma = \{(x, y) \in X \times Y \mid f(x) = y\}.$$

Dimostrare che la proiezione $p\colon \Gamma \to X$ è un omeomorfismo.

Esercizio 3. Sia $\mathcal{B}$ l'insieme dei rettangoli semiaperti

$$R_{a,b,c,d} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \le x < b\,,\ c \le y < d\}$$

a) Dimostrare che $\mathcal{B}$ è base di una topologia τ su $\mathbb{R}^2$
b) Siano

$$L = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y = 0\}\,, \qquad L' = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x - y = 0\}\,.$$

Descrivere la topologia indotta da τ su L e su L'.

Esercizio 4. Provare che i seguenti sottoinsiemi del piano $\mathbb{R}^2$ sono tutti omeomorfi tra loro.
(1) $\{(x, y) \mid 0 \le x,\ 0 < y\}$.
(2) $\{(x, y) \mid 0 \le x\}$.
(3) $\{(x, y) \mid 0 \le x \le y\}$.
(4) $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 \le 1,\ x \ne 1\}$.

Esercizio 5. Sia

$$\tau = \{\emptyset\,, \mathbb{R}\} \cup \{(q,\ \infty) \mid q \in \mathbb{Q}\}.$$

a) τ è una topologia su $\mathbb{R}$?
b) τ è base per una topologia su $\mathbb{R}$?

Esercizio 6. Quante sono le topologie su un insieme di tre elementi? Quante tra di esse sono topologicamente distinte (cioè non omeomorfe)?

Esercizio 7. Determinare i punti dove è continua la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = \begin{cases} 0\,, & \text{se} \quad x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}\,, \\ |1/q|\,, & \text{se} \quad x = p/q \in \mathbb{Q}\,, \quad \text{con} \quad (p, q) = 1\,. \end{cases}$$

Esercizio 8. Sia $X = \mathcal{P}(\mathbb{N})$ la famiglia di tutti i sottoinsiemi di $\mathbb{N}$.
Per ogni coppia di sottoinsiemi **finiti e disgiunti** $A, B \subset \mathbb{N}$ definiamo

$$U(A, B) = \{S \in X \mid A \subset S,\ S \cap B = \emptyset\}.$$

(1) Dimostrare che gli $U(A, B)$ formano, al variare di A e B, una base di aperti di una topologia su X.
(2) Dimostrare che con tale topologia la funzione

$$f\colon X \to \mathbb{R}, \qquad f(S) = \sum_{n \in S} \frac{1}{10^n}$$

è continua ed iniettiva.
(3) $(*)$ Dimostrare che la funzione f è chiusa e quindi un omeomorfismo sull'immagine. (Non attapiratevi troppo se non riuscite a risolvere questo esercizio utilizzando solamente gli strumenti visti finora a lezione: a me (M.M.) è riuscito solo dopo molti tentativi. Vedrete nel corso di Topologia alcuni teoremi che faranno diventare banale questo esercizio.)

Esercizio 9. Sia (X, d) uno spazio metrico e sia $f\colon X \to \mathbb{R}$ un'applicazione continua. Dimostrare che l'applicazione

$$\delta\colon X \times X \to \mathbb{R}, \quad \delta(x, y) = d(x, y) + |f(x) - f(y)|$$

è una distanza che induce la stessa topologia.

Esercizio 10 $(*)$**.** Sia $\mathcal{T}$ la famiglia dei sottoinsiemi di $\mathbb{R}$ della forma $A - N$, dove A è un aperto per la topologia euclidea e N è un insieme di cardinalità finita o numerabile. Provare che non tutti gli elementi di $\mathcal{T}$ sono aperti nella topologia euclidea e che $\mathcal{T}$ è una topologia su $\mathbb{R}$. (Sugg.: ogni aperto di $\mathbb{R}$ può essere scritto come è unione di intervalli $]a, b[$, con $a, b \in \mathbb{Q}$.)