FORME BILINEARI E QUADRATICHE

CORSO DI GEOMETRIA ANALITICA 2007-08, UNIVERSITÀ DI ROMA 1

1. Forme bilineari e quadratiche

Definizione 1.1. Sia V uno spazio di dimensione finita su di un campo $\mathbb{K}$; un'applicazione

$$\varphi\colon V \times V \to \mathbb{K}$$

si dice una *forma bilineare* se per ogni $v \in V$ le due applicazioni

$$\varphi(-, v)\colon V \to \mathbb{K}, \qquad w \mapsto \varphi(w, v),$$

$$\varphi(v, -)\colon V \to \mathbb{K}, \qquad w \mapsto \varphi(v, w)$$

sono lineari.

In altri termini φ è bilineare se per ogni terna di vettori $v, w, z \in V$ e per ogni coppia di scalari $a, b \in \mathbb{K}$ vale

$$\varphi(v, aw+bz) = a\varphi(v, w) + b\varphi(v, z), \qquad \varphi(aw+bz, v) = a\varphi(w, v) + b\varphi(z, v).$$

Ad esempio, se $f, g\colon V \to \mathbb{K}$ sono forme lineari, allora le applicazioni

$$\varphi_1, \varphi_2\colon V\times V \to \mathbb{K}\,, \qquad \varphi_1(x, y) = f(x)g(y),\ \varphi_2(x, y) = f(x)g(y)+g(x)f(y),$$

sono bilineari.

Se $A\colon W \to V$ è un'applicazione lineare, allora l'applicazione

$$A^*\varphi\colon W \times W \to \mathbb{K}, \qquad A^*\varphi(x, y) = \varphi(Ax, Ay)$$

è bilineare.

Lemma 1.2. *Se $e_1, \ldots, e_n$ è una base fissata di V, allora per ogni n^2-upla di scalari φ_{ij}, $i, j = 1, \ldots, n$, esiste un'unica applicazione bilineare $\varphi\colon V\times V \to \mathbb{K}$ tale che $\varphi(e_i, e_j) = \varphi_{ij}$ per ogni i, j.*

Dimostrazione. Esistenza. Se $x = \sum x_ie_i$ e $y = \sum y_ie_i$, basta considerare

$$\varphi(x, y) = \sum_{i,j} \varphi_{ij}x_iy_j.$$

Unicità. Se φ è una forma bilineare su V; utilizzando la bilinearità segue che

$$\varphi(\sum_i x_ie_i, \sum_j y_je_j) = \sum_{i,j} x_iy_j\varphi(e_i, e_j).$$

e quindi φ è univocamente definita dagli scalari $\varphi(e_i, e_j)$. $\square$

Date: 23 ottobre 2007.

Si noti che se B è la matrice di coefficienti $b_{ij} = \varphi(e_i, e_j)$, allora la relazione

$$\varphi(\sum_i x_i e_i, \sum_j y_j e_j) = \sum_{i,j} x_i y_j \varphi(e_i, e_j)$$

può essere scritta come

$$\varphi(\sum_i x_i e_i, \sum_j y_j e_j) = x^T B y$$

dove $x = (x_1, \dots, x_n)^T$, $y = (y_1, \dots, y_n)^T$.

Definizione 1.3. Una forma bilineare $\varphi\colon V \times V \to \mathbb{K}$ si dice:

(1) *Simmetrica* se $\varphi(x, y) = \varphi(y, x)$ per ogni $x, y \in V$.
(2) *Antisimmetrica* se $\varphi(x, y) + \varphi(y, x) = 0$ per ogni $x, y \in V$.
(3) *Alternante* se $\varphi(x, x) = 0$ per ogni $x \in V$.

È facile osservare che ogni forma alternante è anche antisimmetrica, infatti per ogni $x, y \in V$

$$0 = \varphi(x+y, x+y) = \varphi(x, x)+\varphi(x, y)+\varphi(y, x)+\varphi(y, y) = \varphi(x, y)+\varphi(y, x).$$

Viceversa se φ è antisimmetrica ed il campo $\mathbb{K}$ ha caratteristica diversa da 2 (cioè $2 := 1+1 \neq 0$) allora φ è anche alternante: infatti, ponendo $x = y$ vale $\varphi(x, x) + \varphi(x, x) = 0$.

Definizione 1.4. Sia V uno spazio di dimensione finita su di un campo $\mathbb{K}$; un'applicazione

$$\Phi\colon V \to \mathbb{K}$$

si dice una **forma quadratica** se esistono $f_1, \dots, f_n, g_1, \dots, g_n\colon V \to \mathbb{K}$ lineari tali che

$$\Phi(v) = f_1(v)g_1(v) + \cdots + f_n(v)g_n(v).$$

Ad esempio l'applicazione $\Phi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $\Phi(x) = x_1x_2 - x_2x_3 + x_1x_3$ è quadratica.

Se $A\colon W \to V$ è un'applicazione lineare e $\Phi\colon V \to \mathbb{K}$ è una forma quadratica allora l'applicazione

$$A^*\Phi\colon W \to \mathbb{K}, \qquad A^*\Phi(x) = \Phi(Ax)$$

è quadratica.

Forme bilineari simmetriche

Da questo momento supporremo che $2 \neq 0$ in $\mathbb{K}$ (e quindi anche $4, 8, 16, \ldots \neq 0$).
Se $\varphi\colon V \times V \to \mathbb{K}$ è una forma bilineare simmetrica, definiamo la *forma quadratica* associata come l'applicazione

$$\Phi\colon V \to \mathbb{K}, \qquad \Phi(v) = \varphi(v, v).$$

Notiamo che per ogni coppia di vettori $x, y \in V$ vale la *formula di polarizzazione*

$$\varphi(x, y) = \frac{1}{2}(\Phi(x + y) - \Phi(x) - \Phi(y))$$

e quindi ogni forma bilineare simmetrica è univocamente determinata dalla forma quadratica associata; in particolare la restrizione di Φ ad un sottospazio vettoriale $W \subset V$ è identicamente nulla se e solo se la restrizione di φ a $W \times W$ è identicamente nulla.

Viceversa data una forma quadratica $\Phi \colon V \to \mathbb{K}$, l'applicazione

$$\varphi \colon V \times V \to \mathbb{K}, \qquad \varphi(x, y) = \frac{1}{2}(\Phi(x + y) - \Phi(x) - \Phi(y))$$

è una forma bilineare detta **forma polare** di Φ. Per dimostrare la bilinearità non è restrittivo supporre $\Phi(x) = 2f(x)g(x)$; in tal caso la forma polare diventa $\varphi(x, y) = f(x)g(y) + f(y)g(x)$.

Esempio 1.5. (1) Il prodotto scalare canonico su $\mathbb{R}^n$ è una forma bilineare simmetrica.

(2) Il *piano iperbolico* su $\mathbb{K}$ si definisce come lo spazio vettoriale $\mathbb{K}^2$ dotato della forma bilineare simmetrica

$$U\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) = x_1y_2 + x_2y_1.$$

(3) Abbiamo visto che su $\mathbb{K}^n$ ogni forma bilineare prende la forma $x^T By$ per un'opportuna matrice B. Tale forma è simmetrica se e solo se la matrice B è simmetrica.

Definizione 1.6. Il *nucleo* di una forma bilineare simmetrica φ è il sottospazio vettoriale

$$\ker \varphi = \{v \in V \mid \varphi(v, w) = 0 \ \forall w \in V\} = \{v \in V \mid \varphi(v, -) = 0\}$$

e la *nullità* di φ è la dimensione si $\ker \varphi$.

La forma φ si dice *degenere* se $\ker \varphi \neq 0$, *nondegenere* se $\ker \varphi = 0$.

In altri termini φ è nondegenere se e solo se per ogni $v \neq 0$ esiste $w \in V$ tale che $\varphi(v, w) \neq 0$. Bisogna fare attenzione alla reale possibilità che la restrizione di una forma nondegenere ad un sottospazio vettoriale proprio possa essere degenere.

Esercizio 1.7. Mostrare che il prodotto scalare canonico su $\mathbb{R}^n$ ed il piano iperbolico sono nondegeneri. △

Esercizio 1.8. Sia φ la forma polare di una forma quadratica $\Phi \colon V \to \mathbb{K}$. Dimostrare che

$$\ker \varphi = \{x \in V \mid \Phi(x + v) = \Phi(v) \quad \forall\, v \in V\}.$$

△

Sia $\Phi \colon V \to \mathbb{K}$ la forma quadratica associata alla forma bilineare simmetrica φ. Per ogni applicazione lineare $A \colon W \to V$ poniamo $A^*\Phi(x) = \Phi(Ax)$. Poiché

$$A^*\Phi(x) = \Phi(Ax) = \varphi(Ax, Ax) = A^*\varphi(x, x)$$

si osserva immediatamente che $A^*\Phi \colon W \to \mathbb{K}$ è la forma quadratica associata alla forma bilineare simmetrica $A^*\varphi$.

Definizione 1.9. Diremo che due forme bilineari simmetriche $\varphi, \psi \colon V \times V \to \mathbb{K}$ sono *congruenti* se esiste un'applicazione lineare invertibile $A \colon V \to V$ tale che $\varphi = A^*\psi$.
Diremo che due forme quadratiche $\Phi, \Psi \colon V \to \mathbb{K}$ sono *congruenti* se esiste un'applicazione lineare invertibile $A \colon V \to V$ tale che $\Phi = A^*\Psi$.

Lemma 1.10.
1. *Due forme bilineari simmetriche sono congruenti se e solo se le forme quadratiche associate sono congruenti.*
2. *La congruenza è una relazione di equivalenza sull'insieme delle forme bilineari simmetriche e/o quadratiche.*

Dimostrazione. Siano Φ, Ψ le forme quadratiche associate a due forme bilineari simmetriche φ, ψ. Se esiste $A \colon V \to V$ lineare invertibile tale che $\varphi = A^*\psi$ allora per ogni $x \in V$ vale $\Phi(v) = \varphi(v,v) = \psi(Ax, Ax) = A^*\psi(x,x)$ e quindi $\Phi = A^*\Psi$.
Viceversa se $\Phi = A^*\Psi$ allora per ogni $x, y \in V$ vale

$$\varphi(x,y) = \frac{1}{2}(\Phi(x+y) - \Phi(x) - \Phi(y)) = \frac{1}{2}(\Psi(A(x+y)) - \Psi(Ax) - \Psi(Ay)) =$$

$$= \frac{1}{2}(\Psi(Ax + Ay) - \Psi(Ax) - \Psi(Ay)) = \psi(Ax, Ay)$$

e quindi $\varphi = A^*\psi$.
Se $A, B \colon V \to V$ sono lineari invertibili allora

$$(AB)^*\varphi(x,y) = \varphi(ABx, ABy) = A^*\varphi(Bx, By) = A^*B^*\varphi(x,y)$$

da cui segue che $(AB)^*\varphi = A^*B^*\varphi$.
Denotiamo con $\sim$ la relazione di congruenza, cioè $\varphi \sim \psi$ se e soltanto se esiste $A \colon V \to V$ lineare invertibile tale che $\varphi = A^*\psi$. Tale relazione è:
1. *Riflessiva* poiché $I^*\varphi = \varphi$, essendo I l'identità su V.
2. *Simmetrica* poiché se $\varphi = A^*\psi$ allora $(A^{-1})^*\varphi = (A^{-1})^*A^*\psi = (A^{-1}A)^*\psi = \psi$.
3. *Transitiva* poiché se $\varphi = A^*\psi$ e $\psi = B^*\eta$ allora $\varphi = A^*B^*\eta = (AB)^*\eta$.

□

Si noti che se due forme bilineari simmetriche φ, ψ sono congruenti, diciamo $\varphi = A^*\psi$ e $e_1, \ldots, e_n$ è una base di V, allora $\epsilon_1 = Ae_1, \ldots, \epsilon_n = Ae_n$ è ancora una base di V e vale $\varphi(e_i, e_j) = \psi(\epsilon_i, \epsilon_j)$ per ogni i, j.
Viceversa se esistono due basi $e_1, \ldots, e_n$ e $\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n$ di V tali che $\varphi(e_i, e_j) = \psi(\epsilon_i, \epsilon_j)$ per ogni i, j, allora, detta A l'applicazione lineare tale che $Ae_i = \epsilon_i$, allora $\varphi = A^*\psi$.

Lemma 1.11. *Siano $\varphi, \psi \colon V \times V \to \mathbb{K}$ forme bilineari simmetriche e $A \colon V \to V$ invertibile tale che $\varphi = A^*\psi$. Allora $A(\ker\varphi) = \ker\psi$. In particolare la nullità di una forma bilineare simmetrica è invariante per congruenza.*

Dimostrazione. Sia $v \in V$, poiché A^{-1} è surgettiva si ha che $v \in \ker\varphi$ se e solo se $\varphi(v, A^{-1}w) = 0$ per ogni w. Siccome $\varphi(v, A^{-1}w) = \psi(Av, w)$ ne segue che $v \in \ker\varphi$ se e soltanto se $Av \in \ker\psi$. □

Definizione 1.12. Sia φ una forma bilineare simmetrica su V; due vettori $x, y \in V$ si dicono φ-ortogonali se $\varphi(x, y) = 0$.
Una base $e_1, \dots, e_n$ di V si dice φ-ortogonale se $\varphi(e_i, e_j) = 0$ per ogni $i \neq j$.

Rispetto ad una base φ-ortogonale $e_1, \dots, e_n$, la forma quadratica associata prende la forma

$$\Phi(x) = \sum_i \lambda_i x_i^2, \qquad \lambda_i = \Phi(e_i), \quad x = \sum x_i e_i.$$

Se ordiniamo gli indici in modo tale che $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_s = 0$ e $\lambda_{s+1}, \dots, \lambda_n \neq 0$ allora per ogni $x = \sum x_i e_i$ e per ogni $j = 1, \dots, n$ si ha $\varphi(x, e_j) = x_j \lambda_j$ e quindi $x \in \ker \varphi$ se e solo se $x_j \lambda_j = 0$ per ogni j se e solo se $x_j = 0$ per ogni $j > s$. Ne segue che il nucleo di φ coincide con il sottospazio vettoriale generato da $e_1, \dots, e_s$; abbiamo quindi dimostrato il seguente

Corollario 1.13. *Il numero di indici i tali che $\varphi(e_i, e_i) = 0$, calcolati rispetto ad una base φ-ortogonale $e_1, \dots, e_n$ non dipende dalla scelta della base ed è un invariante per congruenza.*

Rimane da vedere che è sempre possibile trovare basi φ-ortogonali. Questo segue dal seguente

Teorema 1.14. *Ogni forma bilineare simmetrica φ ammette basi φ-ortogonali.*

Dimostrazione. Diamo due distinte dimostrazioni del teorema: la prima, breve ed elegante, mostrerà solamente l'esistenza. La seconda, simile al procedimento di ortogonalizzazione di Gram-Schmidt, darà anche un metodo di costruzione della base.

Prima dimostrazione. Dimostriamo il teorema per induzione su $n = \dim V$; se $n = 1$ qualsiasi vettore non nullo è una base φ-ortogonale. Se $n > 1$ si possono avere due casi, nel primo Φ è identicamente nulla e quindi anche φ è nulla ed ogni base è φ-ortogonale. Se invece esiste $v_1 \in V$ tale che $\varphi(v_1, v_1) \neq 0$ allora denotiamo $W = \{w \in V \mid \varphi(v_1, w) = 0\}$. Poiché W è il nucleo dell'applicazione lineare $\varphi(v_1, -)\colon V \to \mathbb{K}$ si ha $\dim W \geq n - 1$ e, siccome $v_1 \notin W$ si ha $\dim W = n - 1$ e $V = \mathbb{K}v_1 \oplus W$. Per induzione esiste una base $v_2, \dots, v_n \in W$ φ-ortogonale. È allora chiaro che $v_1, v_2, \dots, v_n$ è la base cercata.

Seconda dimostrazione. Diremo che una base $e_1, \dots, e_n$ è k-ortogonale se $\varphi(e_i, e_j) = 0$ per ogni $i < k$ e per ogni $j > i$. Ogni base è 1-ortogonale. Illustriamo un algoritmo che permette, a partire da una base k-ortogonale di trovarne un'altra $k + 1$-ortogonale.
1) Sia $e_1, \dots, e_n$ una base di k-ortogonale, se $\varphi(e_k, e_j) = 0$ per ogni $j > k$ allora la base è già $k + 1$-ortogonale e non c'è da faticare. Altrimenti sia $l \leq n$ il minimo indice tale che $\varphi(e_k, e_l) \neq 0$. Se $k = l$ poniamo $\epsilon_i = e_i$ per ogni i e andiamo direttamente al punto 3), se invece $l > k$ passare prima dal punto 2).
2) Se $\varphi(e_k, e_l) \neq 0$, dalla formula $\varphi(e_k + e_l, e_k + e_l) - \varphi(e_k - e_l, e_k - e_l) = 4\varphi(e_k, e_l) \neq 0$ segue che i due addendi al primo membro non possono essere entrambi nulli e possiamo certamente trovare $a \in \{1, -1\} \subset \mathbb{K}$ in modo

che $\varphi(e_k + ae_l, e_k + ae_l) \neq 0$. La base $\epsilon_i = e_i$ se $i \neq k$ e $\epsilon_k = e_k + ae_l$ è k-ortogonale e soddisfa la condizione $\varphi(\epsilon_k, \epsilon_k) \neq 0$.
3) Poniamo $v_i = \epsilon_i$ per ogni $i \leq k$, mentre se $i > k$ poniamo

$$v_i = \epsilon_i - \frac{\varphi(\epsilon_i, \epsilon_k)}{\varphi(\epsilon_k, \epsilon_k)}\epsilon_k.$$

Si verifica facilmente che $v_1, \ldots, v_n$ è una base $(k+1)$-ortogonale.
Partendo da una qualsiasi base, ripetendo il percorso n volte arriviamo ad una base n-ortogonale che, per definizione, è una base φ-ortogonale. □

Definizione 1.15. Il *rango* di una forma bilineare simmetrica $\varphi\colon V \times V \to \mathbb{K}$ è uguale a

$$r(\varphi) = \dim V - \dim \ker \varphi.$$

Essendo la dimensione del nucleo un invariante per congruenza, anche il rango è un invariante per congruenza.

Su $\mathbb{K}^n$, con base canonica $b_1, \ldots, b_n$, ogni forma bilineare simmetrica φ si può scrivere come $\varphi(x, y) = x^T By$, dove B è la matrice di coefficienti $B_{ij} = \varphi(b_i, b_j)$.

Se $A\colon V \to V$ è lineare invertibile, allora $A^*\varphi(x, y) = \varphi(Ax, Ay) = x^T A^T BAy$ e quindi $A^T BA$ è la matrice corrispondente alla forma $A^*\varphi$. Ne segue che *a forme bilineari simmetriche congruenti corrispondono matrici simmetriche congruenti*, dove due matrici B, C si dicono congruenti se esiste una matrice invertibile A tale che $C = A^T BA$.

La forma quadratica corrispondente ad una matrice simmetrica B è

$$\Phi(x) = x^T Bx = \sum_{i,j=1}^{n} B_{ij} x_i x_j = \sum_{i \leq j} q_{ij} x_i x_j,$$

dove $q_{ii} = B_{ii}$ e $q_{ij} = B_{ij} + B_{ji} = 2B_{ij}$ se $i < j$.

Lemma 1.16. *Sia B una matrice simmetrica, il nucleo della forma bilineare $\varphi(x, y) = x^T By$ è uguale al nucleo dell'applicazione $y \mapsto By$. In particolare φ e B hanno lo stesso rango.*

Dimostrazione. Se $By = (a_1, \ldots, a_n)^T$ allora $x^T By = \sum a_i x_i$ e quindi $y \in \ker \varphi$ se e solo se $a_i = 0$ per ogni i. □

Esercizio 1.17. Siano φ, ψ forme bilineari simmetriche su di uno spazio vettoriale V. Dimostrare che se φ è non degenere esiste $f\colon V \to V$ lineare tale che $\psi(x, y) = \varphi(x, f(y))$. (Sugg.: se B è una matrice simmetrica invertibile, $x^T Ay = x^T BB^{-1} Ay$.) △

2. Forme non degeneri, isometrie e sottospazi Lagrangiani

Come al solito lavoriamo in caratteristica diversa da 2.

Lemma 2.1. *Sia $\varphi\colon V \times V \to \mathbb{K}$ una forma bilineare simmetrica non degenere. Per ogni sottospazio $W \subset V$ definiamo*

$$W^\perp = \{v \in V \mid \varphi(v, w) = 0 \ \forall\, w \in W\}.$$

Allora vale la formula

$$\dim W^\perp + \dim W = \dim V.$$

Dimostrazione. Sia $w_1, \dots, w_m$ una base di W, allora $W^\perp$ è il nucleo dell'applicazione lineare

$$V \to \mathbb{K}^m, \qquad v \mapsto (\varphi(w_1, v), \dots, \varphi(w_m, v)),$$

e questo prova che $\dim W^\perp + \dim W \geq \dim V$. Sia H un complementare di W in V, ossia $H \oplus W = V$. Abbiamo visto che $\dim H^\perp + \dim H \geq \dim V$ e quindi che $\dim W^\perp + \dim H^\perp \geq \dim V$. Ogni vettore di $W^\perp \cap H^\perp$ appartiene al nucleo di φ e quindi $W^\perp \cap H^\perp = 0$ e necessariamente $\dim W^\perp + \dim W = \dim V$. □

Definizione 2.2. Un'applicazione lineare $f\colon V \to V$ si dice **ortogonale** rispetto alla forma non degenere φ, o più semplicemente φ-ortogonale, se f

$$\varphi(fx, fy) = \varphi(x, y) \qquad \forall x, y \in V.$$

Se φ è non degenere, allora ogni applicazione φ-ortogonale è invertibile: infatti se $fx = 0$, allora per ogni y vale $\varphi(x, y) = \varphi(fx, fy) = 0$ e quindi $x \in \ker \varphi$.

Le applicazioni φ-ortogonali formano un sottogruppo di $GL(V)$ che si indica con $O(V, \varphi)$.

Esempio 2.3. Sia $v \in V$ tale che $\varphi(v, v) \neq 0$, allora l'applicazione "simmetria rispetto a $v^\perp$"

$$S_v\colon V \to V, \qquad S_v(x) = x - 2\frac{\varphi(x, v)}{\varphi(v, v)}v,$$

è φ-ortogonale. Si noti che $S_v(v) = -v$ e che $S_v(x) = x$ se e solo se $\varphi(x, v) = 0$.

Definizione 2.4. Un sottospazio vettoriale $W \subset V$ si dice **totalmente isotropo** se $\varphi(x, y) = 0$ per ogni $x, y \in W$. Si dice **Lagrangiano** se è totalmente isotropo e se non è contenuto propriamente in alcun sottospazio totalmente isotropo.

È chiaro che ogni applicazione φ-ortogonale trasforma sottospazi Lagrangiani in sottospazi Lagrangiani.

Teorema 2.5 (Teorema di cancellazione di Witt)**.** *Siano $\varphi\colon V \times V \to \mathbb{K}$ una forma bilineare simmetrica non degenere, $W \subset V$ un sottospazio e $g\colon W \to V$ un'applicazione lineare iniettiva tale che*

$$\varphi(gx, gy) = \varphi(x, y) \qquad \forall\, x, y \in W.$$

Allora g si estende ad un'applicazione φ-ortogonale $f\colon V \to V$.

Dimostrazione. Dimostriamo prima il teorema nel caso in cui $\varphi\colon W \times W \to \mathbb{K}$ è non degenere. Sia $e_1, \dots e_m \in W$ una base φ-ortogonale e indichiamo con $v_i = g(e_i)$. Supponiamo che esista un'applicazione $f \in O(V, \varphi)$ tale che $f(e_i) = v_i$ per ogni $i < k$ e dimostriamo che esiste un'altra applicazione $h \in O(V, \varphi)$ tale che $h(e_i) = v_i$ per ogni $i \leq k$.

Denotiamo con $\Phi\colon V \to \mathbb{K}$ la forma quadratica associata e con $u_k = f(e_k)$; per le ipotesi fatte su g e f si ha

$$\Phi(u_k) = \Phi(e_k) = \Phi(v_k) \neq 0, \qquad \varphi(e_i, u_k) = \varphi(e_i, v_k) = 0 \quad \forall\, i < k.$$

Dalla formula

$$\Phi(u_k + v_k) + \Phi(u_k - v_k) = 2(\Phi(u_k) + \Phi(v_k)) = 4\Phi(e_k) \neq 0$$

segue che $\Phi(u_k+v_k)$ e $\Phi(u_k-v_k)$ non sono entrambi nulli. Se $\Phi(u_k-v_k) \neq 0$ allora $S_{u_k-v_k}(e_i) = e_i$ per ogni $i < k$ e

$$S_{u_k-v_k}(u_k) = u_k - \frac{2\varphi(u_k, u_k - v_k)}{\varphi(u_k - v_k, u_k - v_k)}(u_k - v_k) = v_k.$$

Basta quindi considerare $h = S_{u_k-v_k}f$.

Se invece $\Phi(u_k + v_k) \neq 0$ allora $S_{v_k}(e_i) = S_{u_k+v_k}(e_i) = e_i$ per ogni $i < k$ e vale

$$S_{v_k}S_{u_k+v_k}(u_k) = S_{v_k}(-v_k) = v_k.$$

Basta quindi considerare $h = S_{u_k-v_k}f$. Notiamo che se $V = W$ la dimostrazione che abbiamo fatto ci dice che ogni applicazione φ-ortogonale è la composizione di al più $2n$ simmetrie.

Passiamo adesso al caso generale e dimostriamo il teorema per induzione sulla dimensione di $W \cap W^\perp$. Se $W \cap W^\perp = 0$, allora la restrizione di φ a W è non degenere ed in tal caso il teorema è dimostrato.

Supponiamo $W \cap W^\perp \neq 0$ e sia $e_1, \dots e_m \in W$ una base φ-ortogonale: siccome $V^\perp = 0$ si ha necessariamente $m < n$. A meno di permutazioni degli indici possiamo supporre $\Phi(e_m) = 0$. L'applicazione

$$V \to \mathbb{K}^m, \qquad x \mapsto (\varphi(x, e_1), \dots, \varphi(x, e_m))$$

è surgettiva e possiamo trovare $e_{m+1} \in V$ tale che $\varphi(e_m, e_{m+1}) = 1$ e $\varphi(e_i, e_{m+1}) = 0$ per ogni $i < m$; a meno di aggiungere ad e_{m+1} un multiplo scalare di e_m possiamo anche supporre $\varphi(e_{m+1}, e_{m+1}) = 0$.

In maniera del tutto simile possiamo trovare v_{m+1} tale che $\varphi(v_m, v_{m+1}) = 1$, $\varphi(v_i, v_{m+1}) = 0$ per ogni $i < m$ e $\varphi(v_{m+1}, v_{m+1}) = 0$. Se denotiamo con U il sottospazio generato da $e_1, \dots, e_{m+1}$, allora si può estendere g al sottospazio U ponendo $g(e_{m+1}) = v_{m+1}$. Basta adesso dimostrare che la dimensione di $U \cap U^\perp$ è strettamante minore di quella di $W \cap W^\perp$. Sia $x = x_1e_1 + \cdots + x_{m+1}e_{m+1} \in U \cap U^\perp$, allora $\varphi(x, e_m) = x_{m+1} = 0$ e quindi $x \in W$. D'altra parte $W \subset U$ e quindi $U^\perp \subset W^\perp$; quindi

$$U \cap U^\perp \subset W \cap W^\perp.$$

Ma il vettore e_m non appartiene a $U^\perp$ e quindi

$$U \cap U^\perp \neq W \cap W^\perp.$$

□

Corollario 2.6. *Siano U, W due sottospazi totalmente isotropi rispetto ad una forma bilineare simmetrica non degenere $\varphi\colon V \times V \to \mathbb{K}$. Se $\dim U \leq \dim W$, allora esiste $f \in O(V, \varphi)$ tale che $f(U) \subset W$. In particolare $O(V, f)$ agisce transitivamente sui sottospazi Lagrangiani.*

Dimostrazione. Basta applicare il teorema di Witt a qualunque applicazione lineare iniettiva $g\colon U \to W$. □

3. Forme quadratiche complesse

Supponiamo adesso $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ e dimostriamo il seguente

Teorema 3.1. *Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita su $\mathbb{C}$. Due forme quadratiche $\Phi, \Psi\colon V \to \mathbb{C}$ sono congruenti se e solo se hanno lo stesso rango.*

Dimostrazione. Sia $z_1, \ldots, z_n$ un sistema di coordinate lineari su V. Mostriamo che ogni forma quadratica Φ di rango r è congruente alla forma standard

$$I_r(z) = \sum_{i=1}^{r} z_i^2.$$

Consideriamo una base φ-ortogonale $\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n$, a meno di permutazioni di indici abbiamo $\Phi(\epsilon_i) = 0$ se $i > r$ e $\Phi(\epsilon_i) = \lambda_i \neq 0$ se $i \leq r$. Scegliamo per ogni $i \leq r$ una radice quadrata μ_i di λ_i.
Consideriamo la nuova base

$$v_i = \epsilon_i \text{ se } i > r, \qquad v_i = \frac{\epsilon_i}{\mu_i} \text{ se } i \leq r.$$

Per costruzione vale $\Phi(v_i) = 0$ se $i > r$ e $\Phi(v_i) = 1$ se $i \leq r$ e quindi Φ è congruente alla forma I_r. □

4. Forme quadratiche reali

Definizione 4.1. Una forma quadratica $\Phi\colon V \to \mathbb{R}$ su di uno spazio vettoriale reale V si dice:

(1) *definita positiva* (e talvolta scriveremo $\Phi > 0$) se $\Phi(x) > 0$ per ogni $x \in V$, $x \neq 0$.
(2) *definita negativa* ($\Phi < 0$) se $\Phi(x) < 0$ per ogni $x \in V$, $x \neq 0$, o equivalentemente se $-\Phi$ è definita positiva.
(3) *semidefinita positiva* ($\Phi \geq 0$) se $\Phi(x) \geq 0$ per ogni $x \in V$.
(4) *semidefinita negativa* ($\Phi \leq 0$) se $\Phi(x) \leq 0$ per ogni $x \in V$, o equivalentemente se $-\Phi$ è semidefinita positiva.

Ad esempio la forma quadratica associata al prodotto scalare canonico è definita positiva. Una forma bilineare simmetrica si dice un *prodotto scalare* se la forma quadratica associata è definita positiva.

Se φ è una forma bilineare simmetrica, in un sistema di coordinate $x_1, \ldots, x_n$ corrispondente ad una base φ-ortogonale, la forma quadratica associata si scrive

$$\Phi(x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^2.$$

È immediato osservare che $\Phi > 0$ (risp.: $\Phi \geq 0$, $\Phi < 0$, $\Phi \leq 0$ se e solo se $\lambda_i > 0$ (risp.: $\lambda_i \geq 0$, $\lambda_i < 0$, $\lambda_i \leq 0$) per ogni $i = 1, \ldots, n$.

Lemma 4.2. *Sia $\Phi\colon V \to \mathbb{R}$ una forma quadratica, $A\colon V \to V$ lineare invertibile e $W \subset V$ un sottospazio vettoriale. Allora la restrizione di $A^*\Phi$ a W è definita positiva se e solo se lo è anche la restrizione di Φ a AW. Identico risultato si ottiene sostituendo il termine definita con semidefinita e/o positiva con negativa.*

Dimostrazione. Basta ricordarsi che per ogni $w \in W$ vale $A^*\Phi(w) = \Phi(Aw)$. □

Dal precedente lemma segue immediatamente che, per ogni forma quadratica Φ, i due numeri

(1) Φ_+ = massima dimensione di un sottospazio $W \subset V$ tale che la restrizione di Φ a W è definita positiva.
(2) $\Phi_- = (-\Phi)_+$ = massima dimensione di un sottospazio $W \subset V$ tale che la restrizione di Φ a W è definita negativa.

sono invarianti per congruenza.

Definizione 4.3. Il numero intero $\sigma = \Phi_+ - \Phi_-$ è detto *segnatura* della forma quadratica Φ. (Alcuni intendono per segnatura la coppia di numeri (Φ_+, Φ_-).)

Teorema 4.4 (Teorema di Sylvester)**.** *Data la forma quadratica, scritta, rispetto ad una opportuna base, in forma diagonale,*

$$\Phi(x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^2,$$

si considerino i numeri

(1) *p = numero di indici i tali che $\lambda_i > 0$.*
(2) *q = numero di indici i tali che $\lambda_i < 0$.*

Allora vale $\Phi_+ = p$ e $\Phi_- = q$. In particolare p e q non dipendono dalla particolare base φ-ortogonale scelta e sono invarianti per congruenza.

Dimostrazione. È sufficiente dimostrare $\Phi_+ = p$: infatti considerando la forma quadratica opposta i coefficienti λ_i cambiano tutti di segno e $(-\Phi)_+ = \Phi_-$. A meno di permutazione di indici possiamo supporre $\lambda_1, \ldots, \lambda_p > 0$, $\lambda_{p+1}, \ldots, \lambda_{p+q} < 0$ e $\lambda_{p+q+1}, \ldots, \lambda_n = 0$.
Sia $L \subset V$ il sottospazio definito dalle equazioni $x_{p+1} = \ldots = x_n = 0$ e denotiamo con $\pi\colon V \to L$ la proiezione sulle prime p coordinate $\pi(x_1, \ldots, x_n) = (x_1, \ldots, x_p, 0, \ldots, 0)$.
La restrizione di Φ al sottospazio L è definita positiva e quindi, per definizione di Φ_+, si ha $p \leq \Phi_+$.
Viceversa, sempre per definizione di Φ_+, esiste un sottospazio vettoriale $W \subset V$ di dimensione Φ_+ tale che $\Phi(x) > 0$ per ogni $x \in W$, $x \neq 0$.
Dimostriamo che l'applicazione lineare $\pi\colon W \to L$ è iniettiva; da questo seguirà che $\Phi_+ = \dim W \leq \dim L = p$.
Sia dunque $x = (x_1, \ldots, x_n) \in W$ tale che $\pi(x) = 0$, ciò significa che $x_1 = \ldots = x_p = 0$ e quindi che $\Phi(x) = \sum_{i>p} \lambda_i x_i^2 \leq 0$. D'altra parte Φ è definita positiva su W e la condizione $\Phi(x) \leq 0$ implica necessariamente $x = 0$. □

Corollario 4.5. *Due forme quadratiche definite su di uno spazio vettoriale reale V sono congruenti se e solo se hanno lo stesso rango e la stessa segnatura.*

Dimostrazione. Fissiamo un isomorfismo $V \cong \mathbb{R}^n$ (cioè fissiamo una base); consideriamo poi, per ogni coppia di interi positivi p, q tali che $p+q \leq n$, la forma quadratica

$$I_{p,q}(x) = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \cdots - x_{p+q}^2.$$

e dimostriamo che ogni forma quadratica è congruente ad $I_{p,q}$ per opportuni p, q. Notiamo poi che, per il teorema di Sylvester gli interi p, q sono invarianti per congruenza e sono determinati dal rango $r = p + q$ e dalla segnatura $\sigma = p - q$.
Sia dunque Φ una forma quadratica; sappiamo che esiste un sistema di coordinate lineari $y_1, \ldots, y_n$ su $\mathbb{R}^n$ rispetto al quale

$$\Phi(y) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i^2$$

A meno di permutazioni di indici possiamo assumere $\lambda_i > 0$ se $i \leq p$, $\lambda_i < 0$ se $p < i \leq p+q$ e $\lambda_i = 0$ se $i > p+q$. Nel sistema di coordinate

$$\begin{cases} z_i = \sqrt{\lambda_i}\, y_i & \text{se } i \leq p \\ z_i = \sqrt{-\lambda_i}\, y_i & \text{se } p < i \leq p+q \\ z_i = y_i & \text{se } p+q < i \end{cases}$$

la forma quadratica diventa

$$\Phi(z) = \sum_{i=1}^{p} z_i^2 - \sum_{i=p+1}^{p+q} z_i^2$$

che è congruente a $I_{p,q}$. □

Esempio 4.6. Calcoliamo rango e segnatura della forma quadratica

$$\Phi \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad \Phi(x) = x_1^2 - 2\lambda x_1 x_2 - x_2^2.$$

Nella base canonica b_1, b_2 la matrice simmetrica corrispondente $B = (\varphi(b_i, b_j))$ è

$$\begin{pmatrix} 1 & -\lambda \\ -\lambda & -1 \end{pmatrix}$$

Osserviamo che $\Phi(b_1) > 0$ da cui deduciamo $\Phi_+ \geq 1$ e $\Phi(b_2) < 0$ da cui deduciamo $\Phi_- \geq 1$. Siccome $\Phi_+ + \Phi_- \leq 2$ dovrà necessariamente essere $\Phi_+ = \Phi_- = 1$. Dunque rango 2 e segnatura 0.

Il segno del determinante di una matrice simmetrica è invariante per congruenza. Infatti se B, C sono matrici reali simmetriche congruenti, allora esiste una matrice invertibile A tale che ${}^tABA = C$ e quindi

$$\det C = \det({}^tA)\det(B)\det(A) = \det(B)\det(A)^2.$$

Siccome ogni matrice simmetrica è congruente ad una matrice diagonale, segue immediatamente dal teorema di Sylvester che, per una forma quadratica

$$\Phi \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \qquad \Phi(x) = {}^txBx,$$

vale

(1) $\det(B) = 0$ se e solo se rango$< n$.
(2) $\det(B) > 0$ se e solo se rango$= n$ e Φ_- pari.
(3) $\det(B) < 0$ se e solo se rango$= n$ e Φ_- dispari.

Esempio 4.7. Calcoliamo, in funzione di $t \in \mathbb{R}$ rango e segnatura della matrice simmetrica

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & t \end{pmatrix}$$

Sia ha $\Phi(b_1) = 1$, dove b_1, b_2 denota la base canonica e Φ la forma uadratica associata alla matrice: dunque $\Phi_+ \geq 1$ e $\Phi_- \leq 1$ Il determinante è uguale a $t - 1$ e quindi

(1) per $t = 1$ il rango è 1 e la segnatura è 1.
(2) per $t > 1$ il rango è 2, Φ_- è pari e quindi la segnatura è 2.
(3) per $t < 1$ il rango è 2, Φ_- è dispari e quindi la segnatura è 0.

Attenzione: per $0 < t < 1$ gli elementi della diagonale sono tutti positivi ma vale $\Phi_+ = 1$.

Esempio 4.8. Calcoliamo rango e segnatura della forma quadratica Φ associata alla matrice simmetrica

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

La diagonale contiene sia valori positivi che negativi e quindi $\Phi_+ \geq 1$, $\Phi_- \geq 1$. Il determinante della matrice è $-5 < 0$, quindi Φ_- è dispari e di conseguenza $\Phi_+ = 2$ e $\Phi_- = 1$.

Esempio 4.9. Calcoliamo rango e segnatura della forma quadratica Φ associata alla matrice simmetrica

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 350! \\ 1 & 2 & \pi \\ 350! & \pi & -3 \end{pmatrix}$$

La diagonale contiene sia valori positivi che negativi e quindi $\Phi_+ \geq 1$, $\Phi_- \geq 1$. La restrizione della forma quadratica al sottospazio U generato dai primi due vettori della base canonica è rappresentata dalla matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

e quindi è definita positiva. Quindi $\Phi_+ \geq 2$ e dunque $\Phi_+ = 2$ e $\Phi_- = 1$.

Esercizio 4.10. Sia B una matrice simmetrica non nulla con tutti gli elementi sulla diagonale uguali a 0. Dimostrare che la forma quadratica associata è indefinita. △

Esempio 4.11. Calcoliamo rango e segnatura della forma quadratica

$$\Phi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \quad \Phi(x) = x_1^2 - 2x_1x_2 - 2x_1x_3.$$

Denotiamo con φ la forma bilineare simmetrica associata a Φ. Nella base canonica b_1, b_2, b_3 la matrice simmetrica corrispondente $B = (\varphi(b_i, b_j))$ è

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Applichiamo l'algoritmo di ortogonalizzazione; poiché $\varphi(b_1, b_1) \neq 0$, si passa alla base

- $c_1 = b_1 = (1, 0, 0)$
- $c_2 = b_2 - \dfrac{\varphi(b_2, b_1)}{\varphi(b_1, b_1)} b_1 = b_2 + b_1 = (1, 1, 0)$
- $c_3 = b_3 - \dfrac{\varphi(b_3, b_1)}{\varphi(b_1, b_1)} b_1 = b_3 + b_1 = (1, 0, 1)$

La matrice $C = (\varphi(c_i, c_j))$ è

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Si ripete l'algoritmo costruendo la nuova base

- $d_1 = c_1 = (1, 0, 0)$
- $d_2 = c_2 = (1, 1, 0)$
- $d_3 = c_3 - \dfrac{\varphi(c_3, c_2)}{\varphi(c_2, c_2)} c_2 = c_3 - c_2 = (0, -1, 1)$

La matrice $D = (\varphi(d_i, d_j))$ è

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Quindi, per il teorema di Sylvester, la forma Φ ha rango 2 e segnatura 0 ($p = q = 1$).

5. Congruenze elementari

Due matrici simmetriche sono congruenti se e solo se rappresentano la stessa forma bilineare $\varphi \colon V \times V \to \mathbb{K}$ rispetto a due basi dello spazio vettoriale V.

Sia $e_1, \ldots, e_n$ una base di V e consideriamo la matrice $B = (b_{ij}) = (\varphi(e_i, e_j))$. Consideriamo adesso la base ottenuta aggiungendo a e_h un multiplo scalare di e_k, con $h \neq k$, ossia consideriamo la base $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$ dove

$$\varepsilon_h = e_h + \lambda e_k, \qquad \varepsilon_i = e_i \text{ per } i \neq h.$$

La nuova matrice $C = (c_{ij}) = (\varphi(\varepsilon_i, \varepsilon_j))$ soddisfa le uguaglianze

$$\begin{cases} c_{hh} = b_{hh} + \lambda b_{hk} + \lambda b_{kh} + \lambda^2 b_{kk} & \\ c_{hi} = b_{hi} + \lambda b_{ki},\ c_{ih} = b_{ih} + \lambda b_{ik} & \text{per } i \neq h, \\ c_{ij} = b_{ij} & \text{per } i, j \neq h. \end{cases}$$

Dunque la matrice C si ottiene dalla matrice B in **due passaggi**: nel primo si somma alla riga h la riga k motiplicata per λ. Nel secondo si somma alla colonna h la colonna k **della nuova matrice** moltiplicata per λ. Vediamo un esempio 3×3 con $h = 1$, $k = 2$ e $\lambda = 3$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 4 & 4 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 16 & 4 & 4 \\ 4 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Con tali congruenze elementari è sempre possibile ricondurre una matrice simmetrica ad una matrice diagonale.

Esempio 5.1. Cerchiamo una matrice diagonale congruente a

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

Come primo passaggio sottraiamo alla seconda rigonna (riga-colonna) la prima rigonna:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

Come secondo passaggio sottraiamo alla terza rigonna la prima rigonna:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}.$$

Possiamo quindi dire che B ha rango 3 e segnatura -1.

Esempio 5.2. Calcoliamo rango e segnatura della matrice simmetrica

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Prima rigonna+seconda rigonna:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Terza rigonna $-$ prima rigonna:

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Seconda rigonna $-\frac{2}{3}$prima rigonna:

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dunque la matrice B ha rango 2 e segnatura 0.

A volte per semplificare i conti può risultare utile moltiplicare una rigonna per uno scalare t non nullo: tale operazione corrisponde a moltiplicare un elemento della base per lo stesso scalare e si ottiene moltiplicando prima la riga per t e poi la nuova colonna per t. Vediamo un esempio dove la seconda rigonna è moltiplicata per 2:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 4 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

6. Esercizi di riepilogo

Definizione 6.1. Un vettore $x \in V$ si dice *isotropo* (rispetto ad una forma quadratica Φ) se $\Phi(x) = 0$.

Esercizio 6.2. Sia φ una forma bilineare simmetrica reale di rango r e segnatura σ. Provare:

(1) $r - \sigma$ è pari.
(2) φ è semidefinita positiva se e solo se $r = \sigma$.
(3) φ è semidefinita negativa se e solo se $r = -\sigma$.
(4) φ è semidefinita se e solo se ogni vettore isotropo appartiene al nucleo di φ.
(5) Usare i punti 1, 2 e 4 per trovare, senza bisogno di far calcoli, rango e segnatura della forma quadratica dell'Esempio 4.11.

△

Esercizio 6.3. Sia V lo spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ una cui base è data da $\cos t$, $\sin t$. Si definisca

$$\langle f,\, g\rangle := \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)dx.$$

Verificare che si tratta di un prodotto scalare . Trovare la matrice associata rispetto alla base data. △

Esercizio 6.4. Siano $f, g \colon V \to \mathbb{R}$ lineari e linearmente indipendenti come vettori di V^*. Mostrare che $\Phi(x) = f(x)g(x)$ è una forma quadratica di rango 2 e segnatura 0. Cosa si può dire se f e g sono linearmente dipendenti? △

Esercizio 6.5. Determinare rango e segnatura della forma quadratica $\Phi \colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$

$$\Phi(x) = x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_4.$$

△

Esercizio 6.6. Determinare tutti i vettori isotropi della forma quadratica $\Phi \colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ associata alla matrice

$$\begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

△

Esercizio 6.7. Determinare rango e segnatura della forma quadratica $\Phi \colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$

$$\Phi(x) = x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 + 2x_2x_3 + 2x_4x_1.$$

△