Geometria. a.a. 2022–23

Prova scritta del 12 Settembre 2023

Esercizio 1. Si considerino i seguenti sottospazi di $\mathbb{C}^3$:

$$U = \operatorname{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ i \end{pmatrix} \right\}, \quad W = \{ iz_1 + z_2 - z_3 = 0 \}.$$

(1) Determinare basi per ognuno di essi.
(2) Determinare una base di $U \cap W$.
(3) Determinare la dimensione di $U + W$.

Esercizio 2. Discutere la consistenza, al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$, del seguente sistema lineare a coefficienti reali di 3 equazioni nelle 4 incognite x, y, z, w

$$\begin{cases} kx + y + z = 1 \\ ky + w = k \\ kx + y + z + kw = 2. \end{cases}$$

Per i valori di k per cui il sistema risulta consistente, determinarne le soluzioni.

Esercizio 3. Sia $b \colon \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la forma bilineare simmetrica definita da

$$b(x, y) = x_1y_1 + 3(x_1y_2 + x_2y_2 + x_2y_1) + 5(x_1y_3 + x_2y_3 + x_3y_3 + x_3y_2 + x_3y_1).$$

(1) Stabilire se b è degenere o meno.
(2) Stabilire se b è (semi)definita positiva, (semi)definita negativa o indefinita.

Esercizio 4. Sul campo reale, determinare una base ortonormale di autovettori per la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 5. (1) Dire se è possibile o meno, giustificando la risposta, determinare un'applicazione lineare $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ iniettiva e tale che $\operatorname{Im} g = \operatorname{Span}\{e_1 + e_2\}$, dove e_1, e_2 sono i vettori della base canonica di $\mathbb{R}^2$.

(2) Sia $V \subseteq M_{2,3}(\mathbb{R})$ l'insieme delle matrici A tali che il nucleo dell'applicazione lineare $L_A \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ contenga il vettore $e_1 - e_2 + e_3$, ossia tali che $L_A(e_1 - e_2 + e_3) = 0$, dove e_1, e_2, e_3 sono i vettori della base canonica di $\mathbb{R}^3$.
   (a) dire, motivando la risposta, se esiste $A \in V$ tale che L_A sia surgettiva;
   (b) dire, motivando la risposta, se V è un sottospazio vettoriale di $M_{2,3}(\mathbb{R})$ e, in caso di risposta affermativa, calcolarne la dimensione.