Geometria. a.a. 2022-23

Prova scritta del 10 Luglio 2023

Esercizio 1. In $\mathbb{R}^3$ sia assegnata la forma bilineare simmetrica

$$< X, Y >= x_1y_1 + 2x_2y_2 + 2x_3y_3 + x_1y_2 + x_2y_1 - x_2y_3 - x_3y_2$$

i) Verificare che si tratta di un prodotto scalare definito positivo[1].
ii) Trovare una base ortonormale rispetto al dato prodotto scalare.

Esercizio 2. Si consideri la seguente base di $\mathbb{R}^3$

$$v_1 = (1, 0, 1),\ v_2 = (-2, 0, 0),\ v_3 = (0, -1, 0).$$

Sia $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'unica applicazione lineare tale che

$$F(v_1) = (1 - \lambda, \lambda, \lambda + 1),\ F(v_2) = (-2, -2\lambda, -2\lambda),\ F(v_3) = (0, -2, 0).$$

1) Scrivere la matrice che rappresenta F nella base canonica.
2) Determinare per quali valori di $\lambda \in \mathbb{R}$, l'applicazione F è un isomorfismo.

Esercizio 3. Sia dato il sistema lineare:

$$\begin{cases} 3x + 2y = 1 \\ x + z = 0 \\ -x + 2z = k \\ 3kx + 2y + 3kz = 2 \end{cases}$$

Studiare la compatibilità del sistema al variare di $k \in \mathbb{R}$.

Esercizio 4. Sia $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un'applicazione lineare tale che

$$\ker(T - 2I) = \{(x, y, z) \mid x + y = 0)\} \text{ e } \ker T = \{(x, y, z) \mid x = y - z = 0\}.$$

1) Dire se T è diagonalizzabile.
2) Calcolare il polinomio caratteristico di T.
3) Scrivere la matrice che rappresenta T nella base canonica.

Esercizio 5. Siano $U \subset \mathbb{R}[t]$ lo spazio vettoriale dei polinomi di grado ≤ 3 e

$$V = \{a_0 + a_1t + a_2t^2 + a_3t^3 \in U \mid a_0 + a_2 - a_3 = a_0 + a_1 - a_2 = 0\} \subset U$$

i) Verificare che V è un sottospazio vettoriale.
ii) Determinare una base di V.
iii) Determinare un sottospazio vettoriale $W \subset U$ tale che $U = V \oplus W$.

[1] Suggerimento: non si possono calcolare esplicitamente gli autovalori; potete ragionare sulla formula o sulla segnatura del prodotto scalare dato