

Geometria. a.a. 2022-23

Prova scritta del 23 Gennaio 2023

Esercizio 1. In \mathbb{R}^3 sia assegnato il prodotto scalare

$$\langle X, Y \rangle = x_1 y_1 + 3x_2 y_2 + 2x_3 y_3 + 2x_2 y_3 + 2x_3 y_2$$

- i) Verificare che tale prodotto scalare è definito positivo.
- ii) Trovare una base ortonormale rispetto al dato prodotto scalare del sottospazio W generato dai vettori

$$v_1 = (1, 2, -2), \quad v_2 = (0, 1, 0), \quad v_3 = (-2, 0, 4).$$

Soluzione. i)

$$\langle X, X \rangle = x_1^2 + 3x_2^2 + 2x_3^2 + 4x_2 x_3 = x_1^2 + x_2^2 + 2(x_2 + x_3)^2$$

La somma di questi quadrati è sempre positiva eccetto che nel caso $X = 0$

ii)

$$2v_1 - 2v_2 + v_3 = 0.$$

$$v_1 = (1, 2, -2), \quad v_2 = (0, 1, 0)$$

formano una base di W . Inoltre

$$\langle v_1, v_2 \rangle = 6 - 4 = 2$$

Quindi

$$w_1 = v_2, \quad w_2 = v_1 - (2/3)v_2 = (1, 4/3 - 2)$$

è una base ortogonale e una base ortonormale è

$$u_1 = (1/\sqrt{3})w_1, \quad u_2 = (\sqrt{3}/\sqrt{11})w_2$$

Esercizio 2. Sia

$$S = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix};$$

- i) Verificare se S è diagonalizzabile.
- ii) Calcolare autovalori e autovettori di S .

Soluzione. i) $P_S(t) = \det(S - tI_3) = -(t-1)(t+1)(t-2)$ Gli autovalori sono distinti, quindi diagonalizza.

ii) Gli autovettori di S sono

$$v_1 = (3, -2, 6), \quad v_{-1} = (1, 0, 1), \quad v_2 = (-1, 0, 2).$$

Esercizio 3. Si consideri il sistema di 4 equazioni in 4 incognite:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 1 \\ x_2 + x_3 + (t-2)x_4 = 2 \\ x_1 + x_3 - 2x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 - 3x_4 = 1 - t \end{cases}$$

Studiare la compatibilità del sistema e trovare le soluzioni al variare di $t \in \mathbb{R}$.

Soluzione. Applicando l'eliminazione di Gauss, si ottiene la matrice

$$\left| \begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & t-2 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & -t+1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & t-3 & -t+3 \end{array} \right|$$

Quindi il sistema ammette un' unica soluzione per ogni $t \neq 3$. Per $t = 3$ il sistema diventa

$$\left| \begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right|$$

e le soluzioni sono nella forma

$$v = \left(-\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, 0 \right) + \text{Span}(3, 0, -1, 1)$$

Per $t \neq 3$ abbiamo

$$x_4 = -1, \quad x_3 = \frac{t+2}{2}, \quad x_2 = \frac{t-2}{2}, \quad x_1 = \frac{-t-6}{2}$$

Esercizio 4. Sia $T : \mathbb{C}_2[t] \rightarrow \mathbb{C}_2[t]$ data da

$$p(t) \rightarrow (t+1)p''(t) - 2tp'(t) + 2p(t)$$

- i) Verificare che T è lineare.
- ii) Descrivere $\text{Ker } T$ e $\text{Im } T$.
- iii) Determinare autovalori e autovettori di T .

Soluzione. i) Sia $p(t) = a + bt + ct^2$, allora

$$T(p(t)) = 2c(t+1) - 2t(2ct+b) + 2(a+bt+ct^2) = (2c+2a) + 2ct - 2ct^2$$

L' espressione è omogenea di primo grado negli elementi della base $1, t, t^2$, quindi è lineare.

ii) $\text{Ker } T$ è dato dalle equazioni

$$c + a = c = 0$$

quindi $\text{Ker } T = \text{Span}(t)$. Dato che l'immagine di T deve avere dimensione 2 è immediato che $\text{Im } T = \text{Span}(1, t^2 - t)$

iii) La matrice associata a T rispetto alla base $1, t, t^2$ risulta essere

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix}$$

Gli autovalori sono $2, 0, -2$. La molteplicità geometrica di ogni autovalore è 1, quindi risolvendo i sistemi associati

$$V_2 = \text{Span}(1), \quad V_{-2} = \text{Span}(-1 - 2t + 2t^2), \quad V_0 = \text{Span}(t)$$

Esercizio 5. Nello spazio delle matrici reali $M_2(\mathbb{R})$ sia definito il prodotto scalare definito positivo

$$\langle A, B \rangle = \text{tr}(A^T B).^1$$

Sia f l'operatore definito da

$$f(A) = -A^T$$

- i) Verificare che f è simmetrico².
 ii) Verificare che f è un'isometria lineare, ovvero $\|f(A)\| = \|A\|$ per ogni $A \in M_2(\mathbb{R})$.

Soluzione.

Usiamo le proprietà della traccia, in particolare

$$\text{tr}(C) = \text{tr}(C^T), \quad \text{tr}(CD) = \text{tr}(DC)$$

- i) Simmetria:

$$\langle f(A), B \rangle = \text{tr}(-(A^T)^T B) = \text{tr}(-AB) = \text{tr}((-AB)^T) = \text{tr}(-B^T A^T) = \text{tr}(-A^T B^T) = \langle A, f(B) \rangle$$

- ii) Isometria

$$\langle f(A), f(B) \rangle = \text{tr}(AB^T) = \text{tr}((AB^T)^T) = \text{tr}(BA^T) = \langle A, B \rangle$$

¹Ricordiamo che data una matrice quadrata A la traccia $\text{tr}(A)$ è la somma dei coefficienti sulla diagonale.

²Anche detto autoaggiunto.