Geometria. a.a. 2022–23

Prova scritta del 15 Giugno 2023

Esercizio 1. Data la matrice a coefficienti reali
$$A = \begin{pmatrix} -4 & 8 & 6 \\ -3 & 6 & 5 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$
calcolare:

(1) il rango di A,
(2) la matrice A^3.

Dire se A è diagonalizzabile.

Esercizio 2. Sia $V = \mathbb{R}^4$ e siano U e W i sottospazi di V definiti da
$$U = \mathrm{Span}\{(2,1,1,1),\ (0,1,1,0),\ (-4,0,0,-2)\}, \quad W = \mathrm{Span}\{(0,1,-1,0),\ (4,1,3,2)\}$$

Determinare la dimensione di U e quella di W. Determinare una base per $U + W$. Determinare la dimensione di $U \cap W$. Stabilire se $\mathbb{R}^4 = U \oplus W$.

Esercizio 3. Calcolare rango e segnatura della forma bilineare $b\colon \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$,
$$b(x, y) = x_1y_1 + 2x_3y_3 + x_1y_3 + x_3y_1 - x_2y_2 - 3x_4y_4 + 14(x_1y_4 + x_4y_1) - 6(x_2y_3 + x_3y_2).$$

Soluzione La forma è definita positiva sul sottospazio generato dal primo e dal terzo vettore della base canonica, quindi l'indice di positività è ≥ 2. Similmente, la forma è definita negativa sul sottospazio generato dal secondo e dal quarto vettore della base canonica, quindi l'indice di negatività è ≥ 2. Dunque la forma bilineare ha rango 4 (il massimo possibile) e segnatura $(2, 2)$.

Esercizio 4. Sul campo reale, determinare una base ortonormale di autovettori per la matrice
$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Esercizio 5. Si considerino le seguenti coppie di vettori di $\mathbb{R}^2$:
$$\vec{u}_1 = (1, 2),\ \vec{u}_2 = (1, 1),$$
$$\vec{w}_1 = (5, 2),\ \vec{w}_2 = (-2, 1), .$$

Verificare che esiste ed è unica un'applicazione lineare $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tale che
$$T(\vec{u}_1) = \vec{w}_1, \quad T(\vec{u}_2) = \vec{w}_2, \qquad \text{[Motivare la risposta]}$$

Descrivere esplicitamente l' applicazione T (rispetto alla base canonica)