eserciziLie.tex

1. Esercizi sulle algebre di Lie graduate

Nota: Il bilinguismo è dovuto esclusivamente a fenomeni di taglia and paste.

Esercizio 1.1. Sullo spazio $V = \mathbb{C}[t]$ delle serie formali si considerino gli operatori differenziali

$$\phi_h, \psi_h \colon V \to V, \qquad \phi_h = \frac{t}{(h+1)!}\left(\frac{d}{dt}\right)^{h+1}, \quad \psi_h = \frac{t^{h+1}}{(h+1)!}\frac{d}{dt}, \quad h \geq 1.$$

Siano Φ e Ψ i sottospazi di $\operatorname{Hom}_{\mathbb{C}}(V,V)$ generati dai ϕ_h e ψ_h rispettivamente. Mostrare che Φ e Ψ sono sottoalgebre di Lie isomorfe. Determinare una forma bilineare non degenere $V \times V \to \mathbb{C}$ che identifica Ψ con l'algebra degli aggiunti formali di Φ.

Esercizio 1.2. (caratteristica 0) Mostrare che in un'algebra di Lie graduata $L = \oplus_n L^n$ si ha $[x,x] = 0$ per ogni x di grado pari e $[x,[x,x]] = 0$ per ogni x di grado dispari.

Esercizio 1.3. Sia R una $\mathbb{K}$ algebra associativa graduata e consideriamo il commutatore graduato

$$[a,b] = ab - (-1)^{\bar{a}\,\bar{b}}ba, \qquad a, b \in R.$$

Mostrare che $[,]$ è un bracket di Lie e che vale la formula $[a,bc] = [a,b]c + (-1)^{\bar{a}\,\bar{b}}b[a,c]$.

Esercizio 1.4. Given a graded vector space V on a characteristic 0 field $\mathbb{K}$, we will denote by $\overline{S(V)} = \oplus_{i\geq 1} \bigodot^i V$ the graded symmetric coalgebra cogenerated by V. Denoting by

$$D(V) = \operatorname{Hom}^*_{\mathbb{K}}(\overline{S(V)}, V) = \prod_{i\geq 0} D_i(V), \quad \text{where} \quad D_i(V) = \operatorname{Hom}^*_{\mathbb{K}}(\bigodot^{i+1} V, V),$$

the composition on the right with the natural projection $\overline{S(V)} \to \bigodot^{i+1} V$ give an inclusion $D_i(V) \subset D(V)$. Consider the non associative product

$$D_n(V) \times D_m(V) \xrightarrow{\bullet} D_{n+m}(V),$$

$$f \bullet g(a_0, \ldots, a_{n+m}) = \sum_{\sigma \in S(m+1,n)} (\pm_K) f(g(a_{\sigma(0)}, \ldots, a_{\sigma(m)}), a_{\sigma(m+1)}, \ldots, a_{\sigma(n+m)}),$$

where $\pm_K$ is the Koszul sign and $S(m+1,n)$ is the set of unshuffles[1].

Prove that the bracket

$$[f,g] = f \bullet g - (-1)^{\bar{f}\,\bar{g}} g \bullet f$$

give a structure of graded Lie algebra on $D(V)$. Notice that the induced bracket on the graded Lie subalgebra $D_0(V)$ is the same as the commutator bracket on $\operatorname{Hom}^*(V,V)$.

Nel seguito indichiamo con A un'algebra graduata commutativa con 1 su di un campo $\mathbb{K}$ di caratteristica 0.

Esercizio 1.5. (Operatori differenziali). Consider A as an abelian graded subalgebra of $\operatorname{Hom}^*_{\mathbb{K}}(A,A)$, where every $a \in A$ is identified with the operator

$$a \colon A \to A, \qquad a(b) = ab.$$

For every $f \in \operatorname{Hom}^*_{\mathbb{K}}(A,A)$ end every integer $n > 0$ we define:

$$f_n \colon \bigodot^n A \to \operatorname{Hom}^*_{\mathbb{K}}(A,A), \qquad f_n(a_1, \ldots, a_n) = [\cdots[[f,a_1],a_2],\ldots],a_n].$$

Verificare che f_n è effettivamente un operatore simmetrico (in senso graduato).

Date: November 30, 2011.

[1] $S(a,b)$ indica l'insieme delle permutazioni di $1, 2, \ldots, a+b$ tali che $\sigma(i) < \sigma(i+1)$ per ogni $i \neq a$

Per ogni $n \geq 0$ definiamo

$$\mathrm{Diff}_n(A) = \{f \in \mathrm{Hom}^*_{\mathbb{K}}(A, A) \mid f_{n+1} = 0\}.$$

Provare che:

- $\mathrm{Diff}_0(A) = A$, $\mathrm{Der}^*_{\mathbb{K}}(A, A) = \{f \in \mathrm{Diff}_1(A) \mid f(1) = 0\}$, $\mathrm{Diff}_n(A) \subset \mathrm{Diff}_{n+1}(A)$,
- se $f \in \mathrm{Diff}_n(A)$, $g \in \mathrm{Diff}_m(A)$ allora $fg \in \mathrm{Diff}_{n+m}(A)$, $[f, g] \in \mathrm{Diff}_{n+m-1}(A)$ (sugg.: induzione su $n + m$).

In particolare $\mathrm{Diff}(A) := \bigcup_n \mathrm{Diff}_n(A)$ è una sottoalgebra di Lie graduata di $\mathrm{Hom}^*_{\mathbb{K}}(A, A)$.

Esercizio 1.6. Sia $A = \mathbb{K}[t]$, provare che un operatore differenziale $f \in \mathrm{Diff}_n(A)$ è univocamente determinato da $f(1), f(t), \dots, f(t^n)$ (sugg.: $f_k(t, t, \dots, t) =?$). Dedurre che esistono unici $p_0, \dots, p_n \in \mathbb{K}[t]$ tali che

$$f = p_0 + p_1 \frac{d}{dt} + \cdots + p_n \frac{d^n}{dt^n}.$$

Esercizio 1.7. Calcolare Diff_1 e Diff_2 dell'algebra $A = \mathbb{C}[t^2, t^3] \subset \mathbb{C}[t]$ e mostrare che l'applicazione

$$\mathrm{Diff}_1(A) \otimes \mathrm{Diff}_1(A) \to \mathrm{Diff}_2(A), \qquad f \otimes g \to fg$$

non è surgettiva.

Esercizio 1.8. (Higher Jacobi) Dimostrare che for every $f, g \in \mathrm{Hom}^*_{\mathbb{K}}(A, A)$ we have

$$[f, g]_n(a_1, \dots, a_n) = \sum_{k=0}^{n} \sum_{\sigma \in S(k, n-k)} (\pm_K)\ [f_k(a_{\sigma(1)}, \dots, a_{\sigma(k)}), g_{n-k}(a_{\sigma(k+1)}, \dots, a_{\sigma(n)})],$$

where $f_0(\emptyset) = f$, $g_0(\emptyset) = g$.

Esercizio 1.9. (Bracket di Koszul superiori) Nelle notazioni degli esercizi precedenti, sia

$$P\colon\ \mathrm{Hom}^*_{\mathbb{K}}(A, A) \to A, \qquad P(f) = f(1) \in A \subset \mathrm{Hom}^*_{\mathbb{K}}(A, A).$$

Mostrare che

$$P[f, g] = P[f, Pg] - (-1)^{\overline{f}\ \overline{g}} P[g, Pf].$$

Per ogni $f \in \mathrm{Hom}^*_{\mathbb{K}}(A, A)$ ed ogni $n > 0$ definiamo (n-esimo bracket di Koszul)

$$\Phi^n_f = P \circ f_n \in D_{n-1}(A) = \mathrm{Hom}^*_{\mathbb{K}}(\bigodot^n A, A).$$

(Esempio: $\Phi^1_f(a) = f(a) - f(1)a$). Sia $f \in \mathrm{Hom}^*_{\mathbb{K}}(A, A)$, dimostrare che $f \in \mathrm{Diff}_{n-1}(A)$ se e solo se $\Phi^n_f = 0$.

Esercizio 1.10. Dimostrare che l'applicazione

$$\Phi\colon\ \ker P \to D(A), \qquad f \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} \Phi^n_f,$$

è un morfismo di algebre di Lie graduate (suggerimento: Higher Jacobi).