Deformation theory 2011-12

Lezione 1

1) Notazioni

$\mathbb{K}$ campo di caratteristica 0

SET = categoria degli insiemi

$* = \{\emptyset\} \in SET$ singoletta

$SET_* =$ ~~i~~ categoria degli insiemi puntati $= \{(S,*) \mid * \in S\}$

morfismi in $SET_* = \{f : S \to T \mid f(*) = *\}$

$ART = ART_{\mathbb{K}} = \mathbb{K}$-algebre locali artiniane con campo residuo $\mathbb{K}$. Se $A \in ART$ sia $m_A \subset A$ ideale massimale $A/m_A = \mathbb{K}$.

OSS. Siccome

$$\begin{tikzcd} \mathbb{K} \arrow[r] \arrow[rr, bend right, "Id"'] & A \arrow[r] & \mathbb{K} = A/m_A \end{tikzcd}$$

si ha $A = \mathbb{K} \oplus m_A$ come $\mathbb{K}$-spazio vettoriale.

2) Algebre di Lie. L algebra di Lie

$[\,,\,] : L \times L \to L$ ~~antisi~~ bilineare antisimmetrica

Jacobi: $[a,[b,c]] = [[a,b],c] + [b,[a,c]]$

Morfismo di aggiunzione | Esempio $End(V)$ $[a,b] = ab - ba$

$ad : L \to End(L)$ $\quad ad\, f(g) = [f,g]$

Jacobi $\Rightarrow$ ad è un morfismo di algebre di Lie.

Se L è Lie e A un $\mathbb{K}$ algebra commutativa (senza unità)

$\Rightarrow$ $L \otimes A$ è Lie

$$[f \otimes a, g \otimes b] = [f,g] \otimes ab.$$

<u>Serie centrale discendente:</u> Se L è Lie e $V, W \subset L$ due sottospazi vettoriali

$$[V,W] = \mathrm{Span}([v,w] \mid v \in V, w \in W)$$

Definiamo $L^{[1]} = L$, $L^{[2]} = [L,L]$ .. $L^{[n+1]} = [L, L^{[n]}]$

Lemma

i) $L^{[1]} \supset L^{[2]} \supset L^{[3]} \supset \cdots$

ii) $[L^{[i]}, L^{[j]}] \subset L^{[i+j]}$

Proof: i) $L^{[i]} = [L, L^{[i-1]}] \underset{\text{induzione}}{\subset} [L, L^{[i-2]}] = L^{[i-1]}$

(ii) per $i=1$ ok, supponiamo $i>1$, ogni elemento di $[L^{[i]}, L^{[j]}]$ è combinazione lineare di $[[a,b],c]$ con $a \in L$, $b \in L^{[i-1]}$, $c \in L^{[j]}$

Jacobi $\Rightarrow$ $[[a,b],c] = [a,[b,c]] - [b,[a,c]] \in [L, L^{[i+j-1]}] + [L^{[i-1]}, L^{[j+1]}]$ $\square$

Def L nilpotente se $L^{[i]} = 0$ per $i \gg 0$.

Se L nilpotente $\Rightarrow$ $\mathrm{ad}\, a \in \mathrm{End}(L)$ è nilpotente $\forall a \in L$

il viceversa è vero se L ha dimensione finita. (Engel)

Esempio L algebra di Lie, $A \in \mathrm{ART}$, $\Rightarrow$ $L \otimes m_A$ è nilpotente.

3) Estensioni in ART.

Def una estensione è una successione esatta

$$e: \; 0 \to I \to B \xrightarrow{\alpha} A \to 0 \quad \text{con } \alpha \in \mathrm{Mor}_{\mathrm{ART}}(B,A)$$

, I un B-modulo t.c. $\mathrm{Ker}\,\alpha \cdot I \simeq I^2 = 0$

$\Rightarrow$ I è di fatto un A-modulo.

Morfismo di estensioni è un diagramma commutativo

$$\begin{tikzcd}
e: \arrow[d] & 0 \arrow[r] & I \arrow[r] \arrow[d] & B \arrow[r] \arrow[d, "\phi"] & A \arrow[r] \arrow[d, "\psi"] & 0 \\
e': & 0 \arrow[r] & I' \arrow[r] & B' \arrow[r] & A' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

$\phi, \psi \in \mathrm{Mor}_{\mathrm{ART}}$

Defn l'estensione si dice piccola se $I \cdot m_B = I \cdot m_A = 0$

Lemma Dato un morfismo surgettivo $B \xrightarrow{\alpha} A$ in ART esiste una successione finita di piccole estensioni

$$0 \to \mathbb{K} \to A_i \xrightarrow{\alpha_i} A_{i-1} \to 0 \qquad i = 1, \dots, \dim_{\mathbb{K}} \operatorname{Ker} \alpha = n$$

tale che $A_1 = A$, $A_n = B$ e $\alpha = \alpha_1 \circ \alpha_2 \circ \dots \circ \alpha_n$

Proof: Sia $I = \operatorname{Ker} \alpha$ e

$$I \supset m_B \cdot I \supset m_B^2 \cdot I \supset \dots \supset m_B^k I = 0$$

si ha

$$0 \to \frac{I}{m_B I} \to \frac{B}{m_B I} \to A \to 0$$

$$0 \to \frac{m_B I}{m_B^2 I} \to \frac{B}{m_B^2 I} \to \frac{B}{m I} \to 0 \qquad \text{ecc}$$

ciascuna è piccola estensione. possiamo quindi supporre $m_B \cdot \operatorname{Ker} \alpha = 0$.
Spezziamo con filtrazione di $\mathbb{K}$-spazi vettoriali

$$\operatorname{Ker} \alpha = V_0 \supset V_1 \supset \dots \supset V_n = 0 \qquad \frac{V_i}{V_{i+1}} \simeq \mathbb{K}$$

ogni V_i è un ideale di B e si considerano

$$0 \to \mathbb{K} \simeq \frac{V_i}{V_{i+1}} \to \frac{B}{V_{i+1}} \to \frac{B}{V_i} \to 0$$

□

4) Il funtore automorfismi

Sia $S \xrightarrow{s} R$ morfismo di $\mathbb{K}$ algebre commutative con 1

$$\operatorname{aut}_{R/S} = \left\{ R \xrightarrow{\phi} R \text{ (commutante con } S\text{)} \;\middle|\; \phi \text{ automorfismo di } \mathbb{K}\text{-algebre} \right\}$$

È un gruppo! Se avesse una struttura sensata di gruppo algebrico si avrebbe che l'insieme dei morfismi, $\forall A \in ART$

$$(\operatorname{Spec} A, 0) \longrightarrow (\operatorname{Aut}_{R/S}, \operatorname{Id})$$

corrisponde all'insieme dei diagrammi commutativi (che indichiamo $\operatorname{aut}_{R/S}(A)$

$$\begin{tikzcd} S\otimes A \arrow[r, "s\otimes id"] \arrow[d, "s\otimes id"'] & R\otimes A \arrow[d, "id\otimes\pi"] \\ R\otimes A \arrow[ur, "\phi", "\sim"'] \arrow[r, "id\otimes \mathbb{K}"'] & R\otimes\mathbb{K} = R \end{tikzcd} \qquad A \xrightarrow{\pi} \mathbb{K} = A/_{m_A}$$

Sia $Der_S(R,R)$ l'algebra di Lie delle S-derivazioni di R

$$Der_S(R,R) = \{ \delta \in Hom_S(R,R) \mid \delta(ab) = \delta(a)b + a\delta(b) \}$$

Dato che m_A ha dimensione finita su $\mathbb{K}$ si ha

$$Der_S(R,R)\otimes m_A = Der_S(R, R\otimes m_A) \subset Der_S(R, R\otimes A) = Der_{S\otimes A}(R\otimes A, R\otimes A)$$

Isomorfismo di algebre di Lie nilpotenti.

$$Der_S(R,R)\otimes m_A \simeq \{ \delta \in Der_{S\otimes A}(R\otimes A, R\otimes A) \mid (id\otimes\pi)\circ\delta = 0 \}$$

Si ha un'applicazione

$$exp : Der_S(R,R)\otimes m_A \longrightarrow Aut_{R/S}(A)$$

$$\delta \longmapsto e^\delta = \sum \frac{\delta^n}{n!} : R\otimes A \to R\otimes A$$

Proposizione: exp è bigettiva.

Proof: Induzione su $\ell(A) = \dim_{\mathbb{K}} A$.

Se $\ell(A) = 1 \Rightarrow A = \mathbb{K} \Rightarrow Aut_{R/S}(\mathbb{K}) = \{Id\}$

Supponiamo $\ell(A) > 1$, sia $a \in A$ t.c. $a\cdot m_A = 0$
e consideriamo la piccola estensione

$$0 \to \mathbb{K} \xrightarrow{a} A \to B = A/_{\langle a\rangle} \to 0$$

Per l'ipotesi induttiva si ha

$$\begin{tikzcd} Der_S(R,R)\otimes m_A \arrow[r, "\exp"] \arrow[d, "\eta"] & Aut_{R/S}(A) \arrow[d, "\nu"] \\ Der_S(R,R)\otimes m_B \arrow[r, "\exp", "\simeq"'] & Aut_{R/S}(B) \end{tikzcd}$$

Dato che η è surgettiva, anche ν è surgettiva. Basta dimostrare che dati $\delta \in Der_S(R,R)\otimes m_A$ e $\phi \in Aut_{R/S}(A)$ tali che

$$e^{\eta(\delta)} = \nu(\phi)$$, esiste unico $h \in Der_S(R,R)\otimes \mathbb{K}\cdot a$

tale che $e^{\delta+h} = \phi$.

Ogni elemento $\phi \in Aut_{R/S}(A)$ è univocamente determinato dalla sua restrizione

$$R \xrightarrow{\phi} R\otimes A \qquad (\phi \text{ è } A \text{ lineare!})$$

Poniamo

$$h = e^{\delta} - \phi : R \longrightarrow R\otimes \mathbb{K}a$$

$$h(xy) = e^{\delta}(x)\cdot e^{\delta}(y) - \phi(x)\phi(y) = e^{\delta}(x)\cdot h(y) + h(x)\phi(y)$$

Siccome $e^{\delta}(x) \equiv x \mod m_A$ e $\phi(y) \equiv y \mod m_A$ si ha

$$h(xy) = x\, h(y) + h(x)\cdot y \implies h \in Der_S(R,R)\otimes m_A$$

Poi, siccome $h\cdot m_A = 0$ si ha $h^i\delta^s = 0 \quad \forall\, i>0,\ s>0$, $h^2 = 0$

$$e^{\delta+h} = e^{\delta} - h = \phi \qquad \square$$

5) Descrizione del prodotto $\bullet$ $\quad e^{\delta\bullet\beta} = e^{\delta}e^{\beta}$

Formula BCH, vedi dispensa.

6) Sia M un S-modulo e $R = S\oplus M$ estensione banale

$$(s,m)\cdot(s',m') = (ss', sm'+s'm)$$

allora

$$Der_S(R,R) = Hom_S(M,M) \quad \text{e} \quad Aut_{R/S} = Aut_S(M) = GL_S(M)$$

$$\exp : Hom_S(M,M)\otimes m_A \xrightarrow{\sim} \{\varphi \in Aut_{S\otimes A}(M\otimes A) \mid \varphi \equiv Id \mod m_A\}$$