Esercizi di Algebra Lineare

Anno accademico 2017/18
Docenti: A. De Sole, M. Manetti, G. Mondello

Esercizi del 26 ottobre 2017

Esercizio 1. Considerare i seguenti polinomi reali in t:

$$p_1 = 1 + t, \quad p_2 = 1 + 2t + t^2, \quad p_3 = t - t^2, \qquad r_1 = 1 - t, \quad r_2 = 2 + t.$$

(a) Dimostrare che $\mathcal{B} = (p_1, p_2, p_3)$ è una base di $\mathbb{R}[t]_{\leq 2}$ e che $\mathcal{C} = (r_1, r_2)$ è una base di $\mathbb{R}[t]_{\leq 1}$.

(b) Calcolare le coordinate di $q_1 = 2 - t + t^2$ e di $q_2 = 3 + t^2$ rispetto alla base $\mathcal{B}$.

(c) Considerare l'applicazione lineare $D\colon \mathbb{K}[x]_{\leq 2} \to \mathbb{K}[x]_{\leq 1}$ definita come $D(p) := \dfrac{dp}{dx}$. Calcolare la matrice che rappresenta l'applicazione lineare D rispetto alle basi $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$.

Esercizio 2. Considerare l'applicazione lineare $L_A\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ associata alla matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

(a) Esibire una base di $\ker(L_A)$ e calcolarne la dimensione.

(b) Calcolare il rango di L_A ed esibire una base di $\mathrm{Im}(L_A)$.

Esercizio 3. Siano V, W spazi vettoriali sul campo $\mathbb{K}$ e sia $f\colon V \to W$ una applicazione lineare. Siano inoltre $v_1, \ldots, v_k$ vettori di V.

Dimostrare che, se $f(v_1), \ldots, f(v_k)$ sono linearmente indipendenti, allora $v_1, \ldots, v_k$ sono linearmente indipendenti.

Esercizio 4. Fissiamo $\mathbb{K}$ un campo e $n \geq 0$ un intero, e siano $\alpha_0, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ distinti.
Dimostrare che l'applicazione $F\colon \mathbb{K}[x]_{\leq n} \to \mathbb{K}^{n+1}$ definita come

$$F(p) = (p(\alpha_0),\, p(\alpha_1),\, \ldots,\, p(\alpha_n))$$

è lineare e suriettiva.

Esercizio 5. Siano V, W spazi vettoriali di dimensione finita sul campo $\mathbb{K}$ e siano $A \subseteq V$ e $B \subseteq W$ sottospazi vettoriali. Dimostrare che l'insieme

$$H := \{f \in \mathrm{Hom}(V, W) \mid f(A) \subseteq B\}$$

è un sottospazio vettoriale di $\mathrm{Hom}(V, W)$ di dimensione $[\dim(V) - \dim(A)]\dim(W) + \dim(A)\dim(B)$.

(Suggerimento: scegliere basi di A e di B ed estenderle a baasi di V e di W. Come sono fatte le matrici che rappresentano una $f \in H$ rispetto a tali basi?)