Esercizi di Algebra Lineare

Anno accademico 2017/18
Docenti: A. De Sole, M. Manetti, G. Mondello

Esercizi del 23 novembre 2017

Esercizio 1. Scrivere i seguenti numeri complessi nella forma cartesiana $a + ib$ con a, b reali:

$$\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)^3; \quad (-i)^5; \quad (2+2i)(-2+2i); \quad \frac{1+3i}{1-3i}.$$

e esprimere in forma cartesiana le radici quadrate di $1 - 4\sqrt{3}i$.

Esercizio 2. Scrivere i seguenti numeri complessi nella forma polare:

$$-2; \quad 4\pi i; \quad 2\sqrt{3}+2i; \quad 6+6i; \quad -2+2\sqrt{3}i;$$

ed esprimere in forma polare le radici cubiche di $(1+i)(1-i)^{-1}$.

Esercizio 3. Determinare i numeri complessi $z \in \mathbb{C}$ tali che $z^4 = \overline{z}$.
Determinare i numeri complessi $z \in \mathbb{C}$ tali che $z^2 - (1+i)z + (2-i) = 0$.

Esercizio 4. Si consideri lo spazio vettoriale $V = \mathbb{R}[x]_{\leq 3}$ e le sue basi:

$$\mathcal{B} = \left(1, x, x^2, x^3\right)$$

e

$$\mathcal{C} = \left(1 + x + x^2 + x^3, 1 - x + x^2 - x^3, x^2 + x^3, x^2 - x^3\right)$$

(a) Determinare la matrice P del cambio di base che permette di passare dalle coordinate X in base $\mathcal{B}$ alle coordinate in base $\mathcal{C}$.

(b) Dato il polinomio $f(x) = 2 + x^3$, determinare le sue coordinate X in base $\mathcal{B}$ e le sue coordinate Y in base $\mathcal{C}$, e verificare che vale $Y = PX$.

(c) Data l'applicazione lineare $T : V \to V$ data da $T(p(x)) = p(x) - p'(x) + p''(x)$, determinare la sua matrice A in base $\mathcal{B}$ e la sua matrice B in base $\mathcal{C}$, e verificare che vale $B = PAP^{-1}$.

Esercizio 5. Calcolare i seguenti determinanti:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Esercizio 6. Calcolare i seguenti determinanti:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \omega & \omega^2 \\ 1 & \omega^2 & \omega \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & \omega \\ 1 & 1 & \omega^2 \\ \omega^2 & \omega & 1 \end{vmatrix}$$

dove $\omega = \cos(\frac{2\pi}{3}) + i\sin(\frac{2\pi}{3})$.