1 Esercizi di Algebra Lineare, 19 ottobre 2017

(da consegnare il 26 ottobre)

Esercizio 1. Ogni vettore in $\mathbb{R}^n$ può essere pensato come un vettore di $\mathbb{C}^n$ a coordinate reali. Dimostrare che $v_1, \ldots, v_m \in \mathbb{R}^n$ sono linearmente indipendenti su $\mathbb{R}$ se e solo se, pensati come elementi di $\mathbb{C}^n$, sono linearmente indipendenti su $\mathbb{C}$.

Esercizio 2. Siano V e W spazi vettoriali, e sia $f\colon V \to W$ un'applicazione lineare. Per ciascuna delle seguenti affermazioni dire se è vera (fornendo una dimostrazione) o se è falsa (fornendo un controesempio):

1. f trasforma vettori linearmente indipendenti in vettori linearmente indipendenti.
2. f trasforma vettori linearmente dipendenti in vettori linearmente dipendenti.
3. f trasforma un sistema di generatori per V in un sistema di generatori di W.
4. f trasforma ranocchi in principi azzurri.

Esercizio 3. Sia (u, v) una base dello spazio vettoriale bidimensionale V e sia $f : V \to V$ un'applicazione lineare, tale che $f(u) = v$ e $f(v) = u + av$ (per qualche numero a). Mostrare che f è un isomorfismo.

Esercizio 4. Siano $f\colon V \to W$ un'applicazione lineare surgettiva, e $U \subseteq V$ un sottospazio. Dimostrare che la restrizione $f|_U\colon U \to W$ è un isomorfismo se e solo U è complementare di $\ker(f)$ in V, ossia $V = U \oplus \ker(f)$.

Esercizio 5. Un'applicazione lineare $f : V \to V$ si dice proiezione se $f = f \circ f$. Provare che se f è una proiezione allora $f(v) = v$ per ogni $v \in \operatorname{Im}(f)$, e valgono

$$V = \ker(f) \oplus \operatorname{Im}(f) \qquad \text{e} \qquad \operatorname{Im}(f) = \ker(\mathbb{1} - f)\,. \qquad (\mathbb{1} = \text{identità})\,.$$