# Esercizi di Algebra Lineare

Anno accademico 2017/18

Docenti: A. De Sole, M. Manetti, G. Mondello

**Esercizi del 14 dicembre 2017**

---

*Nel seguito potrà essere utile il seguente criterio di diagonalizzabilità.*

**Proposizione.** *Sia $V$ uno spazio vettoriale di dimensione finita su $\mathbb{K}$ e sia $f : V \to V$ una applicazione lineare. Allora $f$ è diagonalizzabile se e solo se valgono le seguenti due proprietà:*

*(i) il polinomio caratteristico $p_f(t)$ si spezza in fattori di primo grado su $\mathbb{K}$;*

*(ii) la somma delle molteplicità geometriche degli autovalori è uguale alla dimensione di $V$.*

---

**Esercizio 1.** Considerare le seguenti matrici a coefficienti reali:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

$$A_4 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad A_5 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad A_6 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Dire per quali $i \neq j$ la matrice $A_i$ è simile alla matrice $A_j$.

**Esercizio 2.** Sia $V = \mathbb{R}[t]_{\leq 3}$ lo spazio vettoriale reale dei polinomi di $t$ di grado al più 3. Definiamo una applicazione lineare $F : V \to V$ nel modo seguente:

$$F(p) := \frac{d^2p}{dt^2} + 5\frac{dp}{dt}.$$

Calcolare il polinomio caratteristico di $F$, determinare gli autovalori e gli autospazi di $F$ e dire se $F$ è diagonalizzabile.

**Esercizio 3.** Considerare la matrice $A \in \mathcal{M}_{3,3}(\mathbb{R})$ seguente

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 14 & -13 & 4 \end{pmatrix}.$$

Trovare basi di $\ker(L_A)$ e $\mathrm{Im}(L_A)$. Determinare gli autovalori e gli autospazi di $L_A$ e dire se sia diagonalizzabile.

**Esercizio 4.** Sia $f : \mathbb{K}^4 \to \mathbb{K}^4$ l'applicazione lineare definita come $f(x, y, z, t) = (2x, y + x, z + x, t + x)$, e sia $V \subset \mathbb{K}^4$ il sottospazio vettoriale di equazione $x + y - z - t = 0$.
Dimostrare che $f(V) \subseteq V$ e calcolare il polinomio caratteristico di $f\big|_V^V : V \to V$, gli autovalori e gli autospazi. Se $f\big|_V^V$ è diagonalizzabile, determinare una base di $V$ composta da autovettori per $f\big|_V^V$.

**Esercizio 5.** Siano $A, B \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K})$ due matrici diagonalizzabili.
Dimostrare che $A, B$ sono simili se e solo $A, B$ hanno il medesimo polinomio caratteristico.

**Esercizio 6.** Sia $T : \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ l'applicazione lineare $T(A) := A^T$.
Calcolare il polinomio caratteristico di $T$, determinarne autovalori ed autospazi.
Dire se $T$ è diagonalizzabile.