1 Esercizi di Algebra Lineare, 12 ottobre 2017

Esercizio 1. Determinare tre numeri reali a, b, c tali che

$$\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, ax + by + cz = 0 \right\} \cap \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x + y + z = x - y + 2z = 0 \right\} = 0\,.$$

Esercizio 2. Completare i vettori

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

ad una base di $\mathbb{Q}^4$.

Esercizio 3. Trovare, oppure dimostrare che non esiste, una base di $\mathbb{R}^4$ contenuta nell'unione $H \cup K$ dei due sottospazi di equazioni:

$$H = \{x + z = y - 3w = 0\}, \qquad K = \{x + y + z = y + w = 0\}\,.$$

Esercizio 4. Sia $H \subset \mathbb{R}^3$ il sottospazio di equazione $x - y + 2z = 0$. Dimostrare che per ogni sottospazio $V \subset \mathbb{R}^3$ tale che $H \oplus V = \mathbb{R}^3$ esiste un unico vettore $v \in H$ tale che

$$v + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in V\,.$$

Esercizio 5. Assumendo come già noto che il polinomio $z^7 + z - 1$ possiede 7 radici complesse distinte, dire se tali radici sono linearmente indipendenti su $\mathbb{Q}$.

Esercizio 6 (☕). Sia $V \subset \mathbb{K}[x]$ un sottospazio vettoriale di dimensione infinita. Dimostrare che esiste una successione infinita $v_0, v_1, \ldots$ di vettori in V tali che:

1. per ogni $n > 0$, il vettore v_n, pensato come un polinomio in $\mathbb{K}[x]$, ha grado $\geq n$;
2. per ogni $n > 0$ i vettori $v_1, \ldots, v_n$ sono linearmente indipendenti;
3. ogni vettore in V è combinazione lineare di un numero finito di vettori v_i.