1 Esercizi di Algebra Lineare, 7 dicembre 2017

(da consegnare il 14 dicembre)

Esercizio 1. Calcolare il prodotto $\begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ e dedurre che per ogni $a \in \mathbb{K}$, $a \neq 0$, le matrici $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ sono simili.

Esercizio 2. Si considerino le seguenti 4 matrici a coefficienti reali:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3-\sqrt{5} & 0 \\ 0 & 0 & 3+\sqrt{5} \end{pmatrix}.$$

Tra le 6 possibili coppie, dire quali sono formate da matrici simili e quali no.

Esercizio 3. Date le due matrici:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 7 & -1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

calcolare:

1. le matrici $A^2 - 15I$ e $-B^3 + 7B^2 - 14B + 8I$;
2. i polinomi caratteristici $p_A(t)$ e $p_B(t)$ di A e B rispettivamente.

Esercizio 4. Calcolare le radici del polinomio caratteristico della matrice

$$\begin{pmatrix} 7 & 9 & -1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & 7 & 9 \\ 2 & 3 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 & 9 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 & 9 & -1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & 7 & 9 \\ 2 & 3 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1}$$

Esercizio 5. Dimostrare che la matrice a coefficienti reali

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -3 & -1 & 1 \\ 9 & 3 & -4 \end{pmatrix}$$

non è diagonalizzabile, ossia che non è simile ad alcuna matrice diagonale.

Esercizio 6. Data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_{3,3}(\mathbb{R}),$$

determinare la matrice B che rappresenta l'applicazione lineare $L_A \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ nella base $u_1 = e_1, u_2 = e_2, u_3 = 2e_1 + e_2 + e_3$ (e_i è la base canonica, per il calcolo di B si intende che la base u_i è sia in partenza che in arrivo). Dire inoltre se A è diagonalizzabile, ossia simile ad una matrice diagonale.