1 Esercizi di Algebra Lineare, 5 ottobre 2017

(da consegnare il 12 ottobre)

Esercizio 1. Costruire un'applicazione iniettiva $f : \mathbb{Q}^2 \to \mathbb{R}$ tale che $f(u+v) = f(u) + f(v)$ per ogni $u, v \in \mathbb{Q}^2$.

Esercizio 2. Sia V uno spazio vettoriale e siano $u, v, x, y \in V$. Dimostrare che, se $x + y = 2u$ e $x - y = 2v$, allora $x = u + v$ e $y = u - v$.

Esercizio 3. Mostrare che l'insieme dei numeri reali della forma $a + b\sqrt[3]{2}$, con $a, b \in \mathbb{Q}$, è uno spazio vettoriale su $\mathbb{Q}$ ma non è un campo di numeri.

Esercizio 4. Sia $V = \mathbb{C} \times \mathbb{C}$ e sia $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Per ciascuna delle seguenti 5 operazioni di "somma" $\oplus$ e "prodotto per scalare" $\star$, determinare quali dei 7 assiomi di spazio vettoriale sono verificati e quali non lo sono:

1. $(a,b) \oplus (c,d) = (a+c, b+d)$, $t \star (a,b) = (ta, b)$;
2. $(a,b) \oplus (c,d) = (a+c, b-d)$, $t \star (a,b) = (ta, tb)$;
3. $(a,b) \oplus (c,d) = (a+c, b+d)$, $t \star (a,b) = (|t|a, |t|b)$;
4. $(a,b) \oplus (c,d) = (a+c, b+d)$, $t \star (a,b) = (ta, 0)$;
5. $(a,b) \oplus (c,d) = (a+c, b+d)$, $t \star (a,b) = (2ta, 2tb)$.

Esercizio 5. Nello spazio vettoriale $\mathbb{K}[x]$, dire quali tra i seguenti sottoinsiemi sono sottospazi vettoriali:

1. $U = \{p(x) \in \mathbb{K}[x] \mid p(0) = 0\}$,
2. $U = \{p(x) \in \mathbb{K}[x] \mid p(0) = 1\}$,
3. $U = \{p(x) \in \mathbb{K}[x] \mid p(1) = 0\}$,
4. $U = \{p(x) \in \mathbb{K}[x] \mid p(0) = p(1) = 0\}$,
5. $U = \{p(x) \in \mathbb{K}[x] \mid p(0)p(1) = 0\}$.

Esercizio 6. Siano U, W sottospazi dello spazio vettoriale V. Mostrare che le seguenti quattro condizioni son oequivalenti:

1. $U \subset W$
2. $U \cap W = U$
3. $U + W = W$
4. $W \cap (S + U) = (W \cap S) + U$, per ogni sottospazio vettoriale S di V.