1 Esercizi di Algebra Lineare, 2 novembre ottobre 2017

(da consegnare il 9 novembre)

Esercizio 1. Sia $f : V \to W$ un'applicazione lineare e sia A la matrice associata ad f in delle fissate basi $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_n)$ di V e $\mathcal{C} = (w_1, \ldots, w_m)$ di W. Indicare quali tra le seguenti affermazioni sono vere e, per quelle false, fornirne un controesempio.

(a) f è invertibile se e solo se esistono una matrice $n \times m$ B tale che $BA = \mathbb{1}_n$ ed una matrice $m \times n$ C tale che $AC = \mathbb{1}_m$.

(b) f è invertibile se e solo se esiste una matrice $n \times m$ B tale che $BA = \mathbb{1}_n$.

(c) f è invertibile se e solo se esiste una matrice $n \times m$ C tale che $AC = \mathbb{1}_m$.

(d) f è iniettiva se e solo se esiste una matrice $n \times m$ B tale che $BA = \mathbb{1}_n$.

(e) f è suriettiva se e solo se esiste una matrice $n \times m$ B tale che $BA = \mathbb{1}_n$.

(f) f è iniettiva se e solo se esiste una matrice $n \times m$ C tale che $AC = \mathbb{1}_m$.

(g) f è suriettiva se e solo se esiste una matrice $n \times m$ C tale che $AC = \mathbb{1}_m$.

(h) f è invertibile se e solo se $m = n$ ed esiste una matrice $n \times n$ B tale che $BA = AB = \mathbb{1}_n$.

(i) f è invertibile se e solo se $m = n$ ed esiste una matrice $n \times n$ B tale che $BA = \mathbb{1}_n$.

(j) f è invertibile se e solo se $m = n$ ed esiste una matrice $n \times n$ C tale che $AC = \mathbb{1}_n$.

Esercizio 2. Sia $f : V \to W$ un'applicazione lineare tra spazi vettoriali di dimensione finita. Dimostrare che $0 \neq \ker f \neq V$ se e solo se esiste un'applicazione lineare $g : W \to V$ tale che $f \circ g = 0$ e $g \circ f \neq 0$.

Esercizio 3. Siano $f, g : V \to W$ due applicazioni lineari tra spazi vettoriali di dimensione finita. Dimostrare che

$$\operatorname{Im}(f+g) \subset \operatorname{Im} f + \operatorname{Im} g$$

e dedurre la disuguaglianza

$$\operatorname{rg}(f+g) \leq \operatorname{rg}(f) + \operatorname{rg}(g)$$

Trovare un esempio dove $\operatorname{rg}(f+g) = 2$ e $\operatorname{rg} f = \operatorname{rg} g = 1$.

Esercizio 4. Date due applicazioni lineari $f : U \to V$ e $g : V \to W$ tra spazi vettoriali di dimensione finita, dimostrare che

$$\operatorname{rg}(g \circ f) \geq \operatorname{rg}(f) + \operatorname{rg}(g) - \dim V$$

Esercizio 5. Sia A una matrice $n \times n$ che commuta con tutte le matrici diagonali $n \times n$, ovvero tale che $AD = DA$ per ogni matrice diagonale D. Dimostrare che A è diagonale.