Esonero di Algebra Lineare del 13 novembre 2017

Anno accademico 2017/18
Canale A-L. Docenti: M. Manetti, G. Mondello

Esercizio 1. Siano $z_1 \neq z_2$ le due radici quadrate del numero complesso $3-4i$. Scrivere nella forma $a+ib$ il numero
$$\frac{z_1+z_2+1+i}{1+2i}+z_1z_2\,.$$

Esercizio 2. Si consideri l'applicazione lineare $L_A\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ associata alla matrice
$$A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}:$$

(a) calcolare il rango di L_A;

(b) esibire una base di $\ker(L_A)$;

(c) esibire una base di $\operatorname{Im}(L_A)$.

Esercizio 3. Si consideri l'applicazione lineare
$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \qquad f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y \\ x-y \\ 2x-3y \end{pmatrix}.$$

Determinare:

1. la matrice A che rappresenta f nelle basi canoniche;
2. la matrice B che rappresenta f nelle basi:

$$v_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},\quad v_2=\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\quad \text{di}\quad \mathbb{R}^2; \qquad w_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\quad w_2=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix},\quad w_3=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\quad \text{di}\quad \mathbb{R}^3.$$

Esercizio 4. Calcolare l'inversa della matrice a coefficienti reali:
$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in M_{4,4}(\mathbb{R})\,.$$

Esercizio 5. Siano V, W spazi vettoriali di dimensione 8 sul campo $\mathbb{K}$ e siano $u, v \in V$ due vettori linearmente indipendenti. Dimostrare che:

1. esistono due sottospazi vettoriali $A \subset B \subset \operatorname{Hom}(V,W)$ di dimensioni $\dim A = 48$ e $\dim B = 56$ tali che $g(v) \neq 0$ e $g(u) = 0$ per ogni $g \in B - A$;
2. per ogni sottospazio vettoriale $H \subset \operatorname{Hom}(V,W)$ di dimensione 57 esiste $f \in H$ tale che $f(v) \neq 0$ e $f(u) = 0$.