SPAZI DUALI. NOTE DI ALGEBRA LINEARE 2010-11

MARCO MANETTI: 4 DICEMBRE 2010

1. Spazi di applicazioni lineari

Dati due spazi vettoriali V, W indichiamo con $\mathcal{L}(V, W)$ l'insieme di tutte le applicazioni lineari $f\colon V \to W$. Tale insieme possiede una struttura naturale di spazio vettoriale dove la somma ed il prodotto per scalare sono definiti dalle regole:

$$f+g\colon V \to W, \qquad (f+g)(v) = f(v)+g(v), \qquad f, g \in \mathcal{L}(V, W),\ v \in V;$$

$$\lambda f\colon V \to W, \qquad (\lambda f)(v) = \lambda(f(v)), \qquad f \in \mathcal{L}(V, W),\ \lambda \in \mathbb{K},\ v \in V.$$

Definizione 1.1. Un **isomorfismo** di spazi vettoriali è un'applicazione lineare bigettiva. Due spazi vettoriali si dicono **isomorfi** se esiste un isomorfismo tra di loro.

Chiaramente se due spazi vettoriali sono isomorfi, allora hanno la stessa dimensione. Tranne il caso banale in cui gli spazi hanno dimensione 0, se esiste un ismorfismo $f\colon V \to W$ tra spazi vettoriali, allora ne esistono infiniti (basta considerare ad esempio i multipli λf, $\lambda \in \mathbb{K}$, $\lambda \neq 0$). Tuttavia in certi casi, esiste un isomorfismo con caratteristiche tali da renderlo indipendente da scelte arbitrarie. In tal caso diremo che l'isomorfismo è *naturale* oppure *canonico*.

Teorema 1.2. *Se V e W hanno dimensione finita, allora anche $\mathcal{L}(V, W)$ ha dimensione finita e vale*

$$\dim \mathcal{L}(V, W) = \dim V \cdot \dim W.$$

Dimostrazione. Mostriamo che per ogni scelta di una base $\mathbf{v} = (v_1, \ldots, v_n)$ di V ed ogni scelta di una base $\mathbf{w} = (w_1, \ldots, w_n)$ di W è possibile definire un isomorfismo $M_{m,n}(\mathbb{K}) \to \mathcal{L}(V, W)$. Precisiamo subito che tale isomorfismo dipenderà pesantemente dalla scelta dell basi e quindi non è naturale. Data una qualunque applicazione lineare $f\colon V \to W$ ed un qualunque polivettore[1] $\mathbf{u} = (u_1, \ldots, u_r) \in V^{\times r}$ denotiamo con $f(\mathbf{u})$ il polivettore

$$f(\mathbf{u}) = (f(u_1), \ldots, f(u_r)) \in W^{\times r}.$$

Sia dunque $f\colon V \to W$ lineare e sia $A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$ la matrice i cui coefficienti della i-esima riga sono le coordinate di $f(v_i)$ nella base $\mathbf{w}$. Vale allora la formula

$$(f(v_1), \ldots, f(v_n)) = (w_1, \ldots, w_m)A,$$

che può essere scritta nella sua forma compatta $f(\mathbf{v}) = \mathbf{w}A$. Al variare di f (ma lasciando fisse $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$) tale regola definisce un'applicazione lineare *(Esercizio: verificare)*

$$\theta\colon \mathcal{L}(V, W) \to M_{m,n}(\mathbb{K}), \qquad f \mapsto A \ :\ f(\mathbf{v}) = \mathbf{w}A.$$

Siccome un'applicazione lineare è univocamente determinata dai valori che assume in una base, l'applicazione θ è bigettiva. $\square$

Osservazione 1.3. È anche vero che $\mathcal{L}(V, W)$ ha dimensione finita solo se V e W hanno dimensione finita. Ma la dimostrazione di questo fatto richiede strumenti troppo avanzati per queste note.

[1] Dato un qualunque insieme A si denota con $A^{\times r}$ il prodotto cartesiano di A con se stesso r volte: $A^{\times 1} = A$, $A^{\times 2} = A \times A$, $A^{\times 3} = A \times A \times A$ ecc.

Esercizi.

1.1. Siano V, W spazi vettoriali di dimensione finita e siano $A \subset V$ e $B \subset W$ due sottospazi. Provare che

$$H = \{f \in \mathcal{L}(V, W) \mid f(A) \subset B\}$$

è un sottospazio vettoriale di dimensione uguale a $(\dim V - \dim A)\dim W + \dim A \dim B$. (Suggerimento: scegliere basi di A e B ed estenderle a basi di V e W. Come sono fatte le matrici che rappresentano gli elementi di H in tali basi?).

2. Spazi duali

Definizione 2.1. Un **funzionale lineare** su di uno spazio vettoriale V sul campo $\mathbb{K}$ è un'applicazione lineare $\varphi\colon V \to \mathbb{K}$. Lo spazio $\mathcal{L}(V, \mathbb{K})$ dei funzionali lineari viene chiamato **duale** di V e viene indicato con V^*.

Abbiamo visto che se V ha dimensione n, allora anche V^* ha dimensione n. Data una base $(v_1, \ldots, v_n)$ di V esiste un modo naturale per costruire una base del duale V^*: per ogni indice $i = 1, \ldots, n$ consideriamo l'applicazione lineare $\varphi_i\colon V \to \mathbb{K}$ cha associa ad ogni vettore la sua i-esima coordinata nella base $(v_1, \ldots, v_n)$, ossia tale che per ogni scelta di $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{K}$ vale

$$\varphi_i(a_1v_1 + \cdots + a_nv_n) = a_i.$$

Equivalentemente φ_i è l'applicazione lineare definita dalle relazioni

$$\varphi_i(v_j) = \delta_{ij}$$

dove δ è la funzione **delta di Kronecker** definita come

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases}$$

Proposizione 2.2. *Nelle notazioni precedenti, la successione $(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ è una base di V^*, detta **base duale** di $(v_1, \ldots, v_n)$.*

Dimostrazione. Dato un qualunque funzionale lineare $f\colon V \to \mathbb{K}$ vale la formula

$$f = f(v_1)\varphi_1 + \cdots + f(v_n)\varphi_n.$$

Infatti il membro a destra della precedente formula è un'applicazione lineare che coincide con f su ogni vettore della base $(v_1, \ldots, v_n)$ e sappiamo che se due applicazioni lineari coincidono sugli elementi di una base allora coincidono sempre. Questo prova immediatamente che i funzionali $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ generano il duale. Viceversa se $a_1\varphi_1 + \cdots + a_n\varphi_n = 0$, allora per ogni indice i si ha

$$0 = (a_1\varphi_1 + \cdots + a_n\varphi_n)(v_i) = a_1\varphi_1(v_i) + \cdots + a_n\varphi_n(v_i) = a_i.$$

Quindi $a_i = 0$ per ogni i ed i vettori φ_i sono linearmente indipendenti. □

Esempio 2.3. La regola del prodotto riga per colonna permette di definire un'applicazione lineare dallo spazio dei vettori riga

$$\mathbb{K}^{\times n} = \{(a_1, \ldots, a_n) \mid a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{K}\}$$

al duale dello spazio $\mathbb{K}^n$: più precisamente per ogni vettore riga $a = (a_1, \ldots, a_n)$ consideriamo l'applicazione lineare

$$\phi_a\colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}, \qquad \phi_a \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = (a_1, \ldots, a_n) \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = a_1b_1 + \cdots + a_nb_n \ ,$$

e definiamo

$$\phi\colon \mathbb{K}^{\times n} \to (\mathbb{K}^n)^*, \qquad \phi(a) = \phi_a.$$

Si verifica immediatamente che ϕ manda la base canonica di $\mathbb{K}^{\times n}$ nella base duale della base canonica di $\mathbb{K}^n$ e quindi ϕ è un isomorfismo di spazi vettoriali.

Esempio 2.4. L'esempio precedente mostra che il duale dello spazio delle matrici $M_{n,1}(\mathbb{K}) = \mathbb{K}^n$ è naturalmente isomorfo allo spazio $M_{1,n}(\mathbb{K}) = \mathbb{K}^{\times n}$. Adesso generalizziamo e mostriamo che per ogni $n, m > 0$ il duale dello spazio $M_{n,m}(\mathbb{K})$ è naturalmente isomorfo a $M_{m,n}(\mathbb{K})$. Se $A = (a_{ij})$ è una matrice quadrata definiamo la sua **traccia** come la somma degli elementi sulla diagonale principale; si verifica immediatamente che l'applicazione traccia

$$\mathrm{Tr}\colon M_{n,n}(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}, \qquad \mathrm{Tr}(a_{ij}) = \sum_i a_{ii},$$

è lineare. Più in generale, per ogni matrice se $B \in M_{m,n}(\mathbb{K})$ l'applicazione

$$\mathrm{Tr}_B\colon M_{n,m}(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}, \qquad \mathrm{Tr}_B(A) = \mathrm{Tr}(BA),$$

è lineare (notare che il prodotto AB è una matrice quadrata di ordine m). Anche l'applicazione

$$\phi\colon M_{m,n}(\mathbb{K}) \to M_{n,m}(\mathbb{K})^*, \qquad \phi(B) = \mathrm{Tr}_B,$$

è lineare tra spazi della stessa dimensione. Per mostrare che è un isomorfismo basta mostrare che è iniettiva, ossia che se $\mathrm{Tr}(AB) = 0$ per ogni $A \in M_{n,m}(\mathbb{K})$ allora $B = 0$. Se $B = (b_{ij})$, considerando come A la matrice E_{ij} che ha come coefficienti 1 al posto (i, j) e 0 altrove si ha che $\mathrm{Tr}(BE_{ij}) = b_{ji}$ (*Esercizio: verificare*) e quindi $\mathrm{Tr}(BE_{ij}) = 0$ se e solo se $b_{ij} = 0$.

Esercizi.

2.1. Provare che i vettori

$$v_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \qquad v_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}, \qquad v_3 = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},$$

formano una base di $\mathbb{K}^3$ e determinare i tre vettori riga che corrispondono alla base duale.

2.2. Sia (v_1, v_2, v_3) una base di uno spazio vettoriale V e sia $(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ la corrispondente base duale. Per ciascuna delle seguenti basi di V, descrivere la base duale in funzione di $(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$.

(1) (v_3, v_2, v_1) (risposta: $(\varphi_3, \varphi_2, \varphi_1)$),
(2) $(2v_1, v_2, v_3)$,
(3) $(v_1 + v_2, v_2, v_3)$,
(4) $(v_1 + v_2 + v_3, v_2, v_3)$.

2.3. Mostrare che se $A = (a_{ij}) \in M_{n,m}(\mathbb{K})$ e $B = (b_{hk}) \in M_{m,n}(\mathbb{K})$ allora valgono le formule

$$\mathrm{Tr}(AB) = \sum_{i,j} a_{ij} b_{ji}, \qquad \mathrm{Tr}(AA^T) = \sum_{i,j} a_{ij}^2.$$

3. Iperpiani e sistemi di coordinate

Definizione 3.1. Un sottospazio H di uno spazio vettoriale di dimensione finita V si dice un **iperpiano** se $\dim H = \dim V - 1$.

Siccome ogni funzionale $\varphi \in V^*$ non nullo deve avere necessariamente rango, ne consegue che $\operatorname{Ker} \varphi$ è un iperpiano in V.

Lemma 3.2. *Sia $H \subset V$ un sottospazio e $v \in V$ un vettore tale che $v \notin H$. Allora esiste $f \in V^*$ tale che*

$$H \subset \operatorname{Ker} f, \qquad f(v) = 1.$$

Dimostrazione. Denotiamo $v_1 = v$ e sia $v_2, \ldots, v_s$ una base di H. Siccome $v_1 \notin L(v_1, \ldots, v_s)$ i vettori $v_1, v_2, \ldots, v_s$ sono linearmente indipendenti e possono essere completati ad una base $v_1, \ldots, v_n$ di V. Basta allora considerare come f il primo elemento della corrispondente base duale. □

Teorema 3.3. *Sia H un iperpiano di uno spazio vettoriale di dimensione finita V. Allora esiste $f \in V^*$, unico a meno di moltiplicazione per uno scalare diverso da 0, tale che $H = \operatorname{Ker} f$.*

Dimostrazione. Scegliamo una base $v_1, \dots, v_n$ di V tale che $v_2, \dots, v_n \in H$. Se φ_1 è il primo vettore della base duale, allora $v_2, \dots, v_n \in \operatorname{Ker}\varphi_1$ e quindi $H \subset \operatorname{Ker}\varphi_1$. Avendo i due sottospazi $H, \operatorname{Ker}\varphi_1$ la stessa dimensione devono coincidere e quindi si può prendere $f = \varphi_1$. Se $g \in V^*$ è tale che $\operatorname{Ker} g = H$ allora $g(v_1) \neq 0$ ed i due funzionali $g, g(v_1)\varphi_1$ coincidono sulla base e quindi coincidono ovunque. □

Esempio 3.4. Tenendo presente l'Esempio 2.3 il teorema precedente ci dice che per ogni iperpiano $H \subset \mathbb{K}^n$ esiste un vettore riga non nullo $(a_1, \dots, a_n)$ tale che

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mid a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = 0 \right\}.$$

Lemma 3.5. *Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita e siano $\varphi_1, \dots, \varphi_r, \psi \in V^*$. Se $\psi \in L(\varphi_1, \dots, \varphi_r)$ allora*

$$\operatorname{Ker}\varphi_1 \cap \cdots \cap \operatorname{Ker}\varphi_r \subset \operatorname{Ker}\psi.$$

Dunque se $S \subset V^*$ è un qualunque sottoinsieme e $\varphi_1, \dots, \varphi_r \in S$ è un insieme massimale di vettori linearmente indipendenti in S vale

$$\bigcap_{\psi \in S} \operatorname{Ker}\psi = \operatorname{Ker}\varphi_1 \cap \cdots \cap \operatorname{Ker}\varphi_r.$$

Dimostrazione. Se ψ è una combinazione lineare di $\varphi_1, \dots, \varphi_r$, diciamo

$$\psi = a_1\varphi_1 + \cdots + a_r\varphi_r,$$

allora per ogni $v \in \operatorname{Ker}\varphi_1 \cap \cdots \cap \operatorname{Ker}\varphi_r$ vale

$$\psi(v) = a_1\varphi_1(v) + \cdots + a_r\varphi_r(v) = 0$$

e quindi $v \in \operatorname{Ker}\psi$.

Se $\varphi_1, \dots, \varphi_r$ appartengono ad un sottoinsieme S si ha per ovvi motivi che

$$\bigcap_{\psi \in S} \operatorname{Ker}\psi \subset \operatorname{Ker}\varphi_1 \cap \cdots \cap \operatorname{Ker}\varphi_r.$$

Se S è contenuto nella chiusura lineare di $\varphi_1, \dots, \varphi_r$ allora ogni elemento di $\operatorname{Ker}\varphi_1 \cap \cdots \cap \operatorname{Ker}\varphi_r$ appartiene a $\operatorname{Ker}\psi$ per ogni $\psi \in S$ e quindi

$$\bigcap_{\psi \in S} \operatorname{Ker}\psi = \operatorname{Ker}\varphi_1 \cap \cdots \cap \operatorname{Ker}\varphi_r.$$

□

Teorema 3.6. *Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita sul campo $\mathbb{K}$ e siano $\varphi_1, \dots, \varphi_r \in V^*$. Consideriamo l'applicazione lineare $\varphi\colon V \to \mathbb{K}^r$ l'applicazione che ha come componenti $\varphi_1, \dots, \varphi_r$:*

$$\varphi(v) = \begin{pmatrix} \varphi_1(v) \\ \vdots \\ \varphi_r(v) \end{pmatrix}$$

Allora:

1. *φ è surgettiva se e solo se $\varphi_1, \dots, \varphi_r$ sono linearmente indipendenti;*
2. *φ è iniettiva se e solo se $\varphi_1, \dots, \varphi_r$ generano il duale;*
3. *φ è bigettiva se e solo se $\varphi_1, \dots, \varphi_r$ sono una base del duale.*

Dimostrazione. (1): se φ non è surgettiva allora l'immagine è un sottospazio vettoriale proprio e quindi contenuta nel nucleo di un funzionale lineare non nullo. Ossia, esiste un vettore riga non nullo $(a_1, \dots, a_r)$ tale che

$$a_1\varphi_1(v) + \cdots + a_r\varphi_r(v) = 0, \qquad \text{per ogni } v \in V,$$

e quindi vale $a_1\varphi_1 + \cdots + a_r\varphi_r = 0$ in V^*. Viceversa se i φ_i sono linearmente dipendenti e $a_1\varphi_1+\cdots+a_r\varphi_r = 0$ allora l'immagine di φ è contenuta nell'iperpiano di equazione $a_1x_1+\cdots+a_rx_r = 0$.

(2): sia $h \le r$ la dimensione del sottospazio vettoriale generato da $\varphi_1,\dots,\varphi_r$; bisogna dimostrare che φ è iniettiva se e solo se $h = \dim V^*$. Non è restrittivo supporre $\varphi_1,\dots,\varphi_h$ linearmete indipendenti. Sia $\phi\colon V \to \mathbb{K}^h$ l'applicazione surgettiva di componenti $\varphi_1,\dots,\varphi_h$. Il nucleo di φ è uguale a $\operatorname{Ker}\varphi_1 \cap\cdots\cap \operatorname{Ker}\varphi_r$, mentre il nucleo di ϕ è uguale a $\operatorname{Ker}\varphi_1 \cap\cdots\cap \operatorname{Ker}\varphi_h$ ed ha dimensione uguale a $\dim V - h$. Per il lemma tali nuclei coincidono e quindi φ è iniettiva se e solo se $\dim V = h$.

La proprietà (3) segue immediatamente da (1) e (2). □

Definizione 3.7. Dato uno spazio vettoriale V di dimensione n, una successione di applicazioni lineari $\varphi_1,\dots,\varphi_n\colon V \to \mathbb{K}$ si dice un **sistema di coordinate** se l'applicazione

$$V \to \mathbb{K}^n, \qquad v \mapsto \begin{pmatrix}\varphi_1(v)\\ \vdots \\ \varphi_n(v)\end{pmatrix}$$

è un isomorfismo di spazi vettoriali.

Il teorema precedente mostra che i sistemi di coordinate sono esattamente le basi del duale. Abbiamo visto che ad ogni base corrisponde un sistema di coordinate (la base duale). Viceversa se le componenti di $\varphi\colon V \to \mathbb{K}^n$ sono un sistema di coordinate, allora i vettori $v_i = \varphi^{-1}(e_i)$ (dove e_i è la base canonica di $\mathbb{K}^n$) formano una base di V la cui base duale sono le componenti di φ. Riepilogando, per uno spazio vettoriale di dimensione finita *dare una base è la stessa cosa che dare un sistema di coordinate.*

Esercizi.

3.1. Sia V spazio vettoriale di dimensione finita:

(1) Dimostrare che ogni sottospazio vettoriale di V è intersezione di iperpiani.
(2) Sia $v_1,\dots,v_n$ una base di V e denotiamo $v_0 = v_1 + v_2 + \cdots + v_n$. Sia $f\colon V \to V$ un'applicazione lineare tale che $f(v_i) = \lambda_i v_i$ per ogni $i = 0,\dots,n$ ed opportuni $\lambda_i \in \mathbb{K}$. Dimostrare che $\lambda_0 = \lambda_1 = \cdots = \lambda_n$.
(3) Sia $f\colon V \to V$ lineare tale che $f(L) \subset L$ per ogni retta $L \subset V$ (retta=sottospazio di dimensione 1). Dimostrare che f è un multiplo scalare dell'identità.
(4) Sia $f\colon V \to V$ lineare tale che $f(H) \subset H$ per ogni iperpiano $H \subset V$. Dimostrare che f è un multiplo scalare dell'identità.

3.2. Sia V spazio vettoriale di dimensione n e siano $H_1,\dots,H_n \subset V$ iperpiani fissati e tali che $H_1\cap\cdots\cap H_n = 0$. Dimostrare che esiste una base $v_1,\dots,v_n$ di V tale che $v_i \in H_j$ per ogni $i \ne j$.

4. Annullatori e luoghi di zeri

Sia V uno spazio vettoriale e V^* il suo duale. Per ogni sottoinsieme $S \subset V$ definiamo il suo **annullatore** $\operatorname{Ann}(S) \subset V^*$ come l'insieme di tutti i funzionali lineari che si annullano su S:

$$\operatorname{Ann}(S) = \{f \in V^* \mid f(s) = 0\ \forall s \in S\} = \{f \in V^* \mid S \subset \operatorname{Ker} f\}.$$

È facile verificare che $\operatorname{Ann}(S)$ è un sottospazio vettoriale: se $f, g \in \operatorname{Ann}(S)$ e $\lambda \in \mathbb{K}$ allora per ogni $s \in S$ vale

$$(f+g)(s) = f(s) + g(s) = 0 + 0 = 0, \qquad (\lambda f)(s) = \lambda f(s) = 0,$$

e quindi $f + g, \lambda f \in \operatorname{Ann}(S)$.

Viceversa se $E \subset V^*$ è un qualunque sottoinsieme si definisce il suo **luogo di zeri** $Z(E) \subset V$ come l'insieme dei vettori che annullanno tutti i funzionali di E:

$$Z(E) = \{v \in V \mid f(v) = 0 \; \forall f \in E\} = \bigcap_{f \in E} \operatorname{Ker} f.$$

Anche in questo caso si verifica immediatamente che $Z(E)$ è un sottospazio vettoriale.

Teorema 4.1. *Sia V spazio vettoriale di dimensione finita n. Allora:*

(1) *per ogni sottospazio vettoriale $W \subset V$ vale*

$$\dim \operatorname{Ann}(W) + \dim W = n, \qquad Z(\operatorname{Ann}(W)) = W;$$

(2) *per ogni sottospazio vettoriale $H \subset V^*$ vale*

$$\dim Z(H) + \dim H = n, \qquad \operatorname{Ann}(Z(H)) = H.$$

Dimostrazione. Sia $W \subset V$ sottospazio vettoriale, sia r la sua dimensione e scegliamo una base $v_1, \ldots, v_n$ di V tale che $v_1, \ldots, v_r \in W$. Sia $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \in V^*$ la base duale; è immediato verificare che un generico elemento

$$a_1\varphi_1 + \cdots + a_n\varphi_n$$

del duale appartiene all'annullatore di W se e solo se $a_1 = \cdots = a_r = 0$. Dunque $\operatorname{Ann}(W)$ è generato da $\varphi_{r+1}, \ldots, \varphi_n$ ed ha dunque dimensione $n - r$.

Sia $H \subset V^*$ è un sottospazio vettoriale di dimensione h e scegliamo una base $f_1, \ldots, f_h$ di H. Abbiamo visto che l'applicazione $F \colon V \to \mathbb{K}^h$ che ha $f_1, \ldots, f_h$ come componenti è surgettiva e quindi il sottospazio

$$Z(H) = Z(f_1, \ldots, f_h) = \operatorname{Ker} F$$

ha dimensione $n - h$.

Se $S \subset V$ è un sottoinsieme e $s \in S$, allora $f(s) = 0$ per ogni $f \in \operatorname{Ann}(S)$ e quindi $s \in Z(\operatorname{Ann}(S))$, ossia $S \subset Z(\operatorname{Ann}(S))$. Similmente se E è un sottoinsieme di V^* e $f \in E$ si ha $f(v) = 0$ per ogni $v \in Z(E)$ e quindi $f \in \operatorname{Ann}(Z(E))$, ossia $E \subset \operatorname{Ann}(Z(E))$.

Se $W \subset V$ è un sottospazio, allora $W \subset Z(\operatorname{Ann}(W))$, i due sottospazi hanno la stessa dimensione e quindi coincidono. Se H è un sottospazio di V^* allora $H \subset \operatorname{Ann}(Z(H))$ ed i due sottospazi hanno la stessa dimensione. □

Corollario 4.2. *Siano H, K due sottospazi di uno spazio V di dimensione finita. Se $\operatorname{Ann}(H) = \operatorname{Ann}(K)$, allora $H = K$.*

Dimostrazione. Si hanno le uguaglianze

$$H = Z(\operatorname{Ann}(H)) = Z(\operatorname{Ann}(K)) = K.$$

□

Esercizi.

4.1. Dimostrare le seguenti proprietà dell'annullatore:

(1) $\operatorname{Ann}(0) = V^*$, $\operatorname{Ann}(V) = 0$;
(2) Se $H \subset K$ allora $\operatorname{Ann}(H) \supset \operatorname{Ann}(K)$.
(3) $\operatorname{Ann}(H + K) = \operatorname{Ann}(H) \cap \operatorname{Ann}(K)$, $\operatorname{Ann}(H \cap K) = \operatorname{Ann}(H) + \operatorname{Ann}(K)$.

4.2. Mostrare che per ogni sottoinsieme finito S di uno spazio vettoriale V la sua chiusura lineare è uguale a $Z(\operatorname{Ann}(S))$.

5. Il biduale

Nella sezione precedente abbiamo visto che annullatori e luoghi di zeri hanno proprietà analoghe; ebbene qui dimostreremo che, a meno di isomorfismi canonici, annullatore e luogo di zeri sono la stessa cosa.

Dato uno spazio vettoriale V sul campo $\mathbb{K}$ possiamo costruire il duale V^* e ripetere la procedura costruendo il duale del duale, detto anche **biduale**:[2]

$$V^{**} = \mathcal{L}(V^*, \mathbb{K}).$$

Mostriamo adesso che esiste un'applicazione lineare canonica $\imath\colon V \to V^{**}$: ad ogni vettore $v \in V$ associamo l'applicazione lineare

$$\imath(v)\colon V^* \to \mathbb{K}$$

definita dalla formula

$$\imath(v)(f) = f(v), \qquad f \in V^*.$$

È evidente per ogni $v \in V$ l'applicazione $\imath(v)$ è lineare, ciò è una diretta conseguenza della definizione di somma e prodotto per scalare in V^*. Anche l'applicazione $\imath\colon V \to V^{**}$ è lineare, infatti per ogni $u, v \in V$ si ha

$$\imath(u+v)(f) = f(u+v) = f(u) + f(v) = \imath(u)(f) + \imath(v)(f) = (\imath(u) + \imath(v))(f), \quad \forall f \in V^*$$

e quindi $\imath(u+v) = \imath(u) + \imath(v)$ in V^{**}. Similmente si prova che $\imath(\lambda v) = \lambda\imath(v)$ per $\lambda \in \mathbb{K}$.

Si noti che per definire $\imath$ non abbiamo fatto uso di basi o scelte arbitrarie e questo ci autorizza ad aggettivare *naturale* l'applicazione $\imath$.

Teorema 5.1. *Nelle notazioni precedenti se V ha dimensione finita allora $\imath$ è un isomorfismo di spazi vettoriali. Inoltre per ogni sottospazio $H \subset V^*$ vale*

$$\imath(Z(H)) = \operatorname{Ann}(H) \subset V^{**}.$$

Dimostrazione. Siccome V, V^* e V^{**} hanno la stessa dimensione, per ostrare che $\imath$ è un isomorfismo basta mostrare che $\operatorname{Ker} \imath = 0$. Sia $v \in V$ divesro da 0, per il Lemma 3.2 esiste $f \in V^*$ tale che $f(v) \neq 0$, quindi $\imath(v)(f) = f(v) \neq 0$ e dunque $\imath(v) \neq 0$.

Sia $H \subset V^*$ un sottospazio vettoriale; il fatto che $\imath$ è un isomorfismo implica in particolare che $\imath(Z(H))$ ha la stessa dimensione di $Z(H)$ e quindi la stessa dimensione di $\operatorname{Ann}(H)$. Per mostrare l'uguaglianza $\imath(Z(H)) = \operatorname{Ann}(H)$ basta quindi mostrare che $\imath(Z(H)) \subset \operatorname{Ann}(H)$. Sia $v \in Z(H)$, allora per ogni $f \in H$ vale

$$\imath(v)(f) = f(v) = 0$$

e questo implica che $\imath(v) \in \operatorname{Ann}(H)$. □

Corollario 5.2. *Sia V di dimensione finita e $W \subset V$ un sottospazio. Allora*

$$\imath(W) = \operatorname{Ann}(\operatorname{Ann}(W)).$$

Dimostrazione. Abbiamo già dimostrato che $W = Z(\operatorname{Ann}(W))$ e quindi

$$\imath(W) = \imath(Z(\operatorname{Ann}(W)) = \operatorname{Ann}(\operatorname{Ann}(W)).$$

□

Osservazione 5.3. Il Teorema 5.1 è falso se V ha dimensione infinita. È possibile dimostrare che se V ha dimensione infinita allora anche il suo biduale algebrico V^{**} ha dimensione infinita, $\imath$ è iniettiva ma non è mai surgettiva.

[2] A volte viene detto anche *biduale algebrico* per distinguerlo dal biduale topologico, oggetto che troverete nei corsi di analisi reale e analisi funzionale.

6. Trasposta

Sia $F : V \to W$ una applicazione lineare. Definiamo l'applicazione **trasposta** di F

$$F^* : W^* \to V^*, \qquad \psi \mapsto F^*(\psi)$$

nel modo seguente: dato $\psi \in W^*$, definiamo $F^*(\psi) \in V^*$ ponendo

$$F^*(\psi)(v) = \psi(F(v)), \qquad \forall v \in V.$$

Dunque $F^*(\psi) : V \to \mathbb{K}$ non è altro che l'applicazione lineare composta:

$$F^*(\psi) = \psi \circ F : V \xrightarrow{F} W \xrightarrow{\psi} \mathbb{K}$$

È immediato verificare che $F^* : W^* \to V^*$ è lineare e cioè che

$$F^*(\psi + \psi') = F^*(\psi) + F^*(\psi')\,, \quad F^*(a\psi) = aF^*(\psi)\,, \forall \psi, \psi' \in W^*\,, \quad a \in \mathbb{K}.$$

Infatti, per ogni $v \in V$

$$F^*(\psi + \psi')(v) = (\psi + \psi')F(v) = \psi f(v) + \psi' F(v) = F^*(\psi)(v) + F^*(\psi')(v)\,,$$

e

$$F^*(a\psi)(v) = (a\psi)(F(v)) = a(\psi F(v)) = aF^*(\psi)(v)\,.$$

È molto importante notare che la definizione di F^* è *intrinseca*, non dipende cioè dalla scelta di basi in V e W. Date due applicazioni lineari

$$V \xrightarrow{F} W \xrightarrow{G} U$$

si ha:

$$(GF)^* = F^*G^* : U^* \to V^*.$$

Anche in questo caso le dimostrazioni sono immmediate. Dobbiamo far vedere che

$$(GF)^*(\psi) = F^*G^*(\psi)\,, \quad \forall \psi \in U^*\,.$$

Questo vuol dire che dobbiamo mostrare che

$$(GF)^*(\psi)(u) = F^*G^*(\psi)(u)\,, \quad \forall \psi \in U^*\,, \quad \forall u \in U.$$

In effetti si ha:

$$(GF)^*(\psi)(u) = \psi GF(u) = (G^*(\psi))(F(u)) = (F^*G^*\psi)(u).$$

Se facciamo due volte la trasposta di un'applicazione $F\colon V \to W$ troviamo un'applicazione lineare $F^{**}\colon V^{**} \to W^{**}$. A questo punto non è sorprendente scoprire che, via gli isomorfismi naturali $\imath\colon V \to V^{**}$ e $\imath\colon W \to W^{**}$, l'applicazione F^{**} coincide con F, o più precisamente che vale

$$F^{**} \circ \imath = \imath \circ F.$$

Sia infatti $v \in V$, per dimostrare che $F^{**}(\imath(v)) = \imath(F(v))$ come elementi di W^{**} bisogna provare che per ogni $g\colon W \to \mathbb{K}$, $g \in W^*$, vale

$$F^{**}(\imath(v))(g) = \imath(F(v))(g).$$

Si ha $\imath(F(v))(g) = g(F(v))$; d'altra parte

$$F^{**}(\imath(v)) = \imath(v) \circ F^*\colon W^* \to \mathbb{K}$$

e quindi

$$F^{**}(\imath(v))(g) = \imath(v) \circ F^*(g) = \imath(v)(g \circ F) = g(F(v)).$$

Teorema 6.1. *Sia $F\colon V \to W$ lineare. Allora vale*

$$\operatorname{Ker} F^* = \operatorname{Ann}(F(V)), \qquad \operatorname{rg}(F) = \operatorname{rg}(F^*).$$

Dimostrazione. Vale $f \in \operatorname{Ker} F^*$ se e solo se $F^*(f)(v) = 0$ per ogni $v \in V$ e siccome $F^*(f)(v) = f(F(v))$ questo equivale a dire che $f(w) = 0$ per ogni $w \in F(V)$. Abbiamo quindi provato che $\operatorname{Ker} F^* = \operatorname{Ann}(F(V))$.

Per le formule sul computo delle dimensioni abbiamo che

$$\operatorname{rg}(F^*) = \dim W - \dim \operatorname{Ker} F^* = \dim W - \dim \operatorname{Ann}(F(V)) = \dim F(V) = \operatorname{rg}(F).$$

□

Per concludere rimane da scoprire la relazione tra la matrice che rappresenta F rispetto a due basi prefissate e la matrice che rappresenta F^*. Siano dunque $(v_1, \ldots, v_n)$ una base di V, $(w_1, \ldots, w_m)$ una base di W e $(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$, $(\psi_1, \ldots, \psi_m)$ le rispettive basi duali. L'applicazione F sarà allora rappresentata dall'unica matrice (a_{ij}) tale che

$$F(v_i) = \sum_j w_j a_{ji}, \qquad i = 1, \ldots, n,$$

mentre F^* sarà allora rappresentata dall'unica matrice (b_{hk}) tale che

$$F^*(\psi_k) = \sum_h \varphi_h b_{hk}, \qquad k = 1, \ldots, m.$$

Per ogni coppia di indici i, k abbiamo

$$F^*(\psi_k)(v_i) = \psi_k(F(v_i))$$

e sostituendo le rispettive espressioni ad entrambi i membri

$$\sum_h \varphi_h(v_i) b_{hk} = \psi_k(\sum_j w_j a_{ji});$$

la parte a sinistra è uguale a b_{ik} e quella a destra è uguale a a_{ki}. Dunque la matrice (b_{hk}) è uguale alla trasposta di (a_{ij}).

Abbiamo quindi ridimostrato in maniera più astratta e concettuale che il rango di una matrice coincide con il rango della sua trasposta.

Esercizi.

6.1. Provare che un'applicazione lineare F è iniettiva se e solo se la sua trasposta F^* è surgettiva.

6.2. Usando l'isomorfismo $M_{n,n}(\mathbb{K})^* \cong M_{n,n}(\mathbb{K})$ introdotto nell'Esempio 2.4 descrivere la trasposta F^* dell'applicazione

$$F \colon \mathbb{K} \to M_{n,n}(\mathbb{K}), \qquad F(t) = tI \quad (I = \text{matrice identità}).$$