SISTEMI LINEARI

ULTIMO AGGIORNAMENTO M.M. 25-1-2010

Introduzione

1. Sistemi lineari

In un cortile ci sono conigli e polli, tutti integri ed in ottima salute. Sapendo che ci sono 10 teste e 30 zampe, dire quanti sono i polli e quanti sono i conigli.

In tale problema abbiamo due quantità incognite, ossia il numero di polli ed il numero di conigli. Essendo questo un libro che vuole insegnare il mestiere di matematico, non perdiamo tempo in chiacchiere inutili e indichiamo con le lettere x, y le nostre due incognite, più precisamente chiamiamo x il numero di conigli ed y il numero di polli nel cortile. Quello che dobbiamo fare è trovare i valori di x, y che soddisfano *entrambe* le equazioni:

(1) $x + y = 10$ (equazione delle teste),
(2) $4x + 2y = 30$ (equazione delle zampe).

Più in generale, quando abbiamo alcune equazioni e cerchiamo i valori che le risolvono tutte, parliamo di *sistema di equazioni*: graficamente i sistemi di equazioni si indicano con una parentesi graffa alla sinistra delle equazioni incolonnate in verticale.

$$\begin{cases} x + y & = 10 \\ 4x + 2y & = 30 \end{cases}$$

Tale sistema può risolvere usando il *metodo di sostituzione*: in tale metodo si suppone che il sistema abbia soluzioni e si utilizza un'equazione per calcolare il valore di un'incognita in funzione delle altre, poi si sostituisce tale valore nelle rimanenti equazioni ottenendo un sistema con un'equazione ed un incognita in meno. Nel nostro caso:

$$\begin{cases} x & = 10 - y \\ 4x + 2y & = 30 \end{cases}, \qquad \begin{cases} x & = 10 - y \\ 4(10 - y) + 2y & = 30 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x & = 10 - y \\ 40 - 2y & = 30 \end{cases}, \qquad \begin{cases} x & = 10 - y \\ -2y & = -10 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x & = 10 - y \\ y & = 5 \end{cases}, \qquad \begin{cases} x & = 5 \\ y & = 5 \end{cases}$$

Abbiamo quindi dimostrato che il precedente problema dei polli e conigli ammette una *unica soluzione*, ossia $x = y = 5$. Le cose però possono andare diversamente. Consideriamo per esempio il seguente problema: *In un cortile ci sono conigli e polli, tutti integri ed in ottima salute. Sapendo che ci sono 10 teste e 20 orecchie, dire quanti sono i polli e quanti sono i conigli.*

In questo caso il sistema diventa

$$\begin{cases} x + y & = 10 \\ 2x + 2y & = 20 \end{cases}$$

Se proviamo a risolverlo con il metodo di sostituzione troviamo

$$\begin{cases} x & = 10 - y \\ 2x + 2y & = 20 \end{cases}, \qquad \begin{cases} x & = 10 - y \\ 2(10 - y) + 2y & = 20 \end{cases}, \qquad \begin{cases} x & = 10 - y \\ 20 & = 20 \end{cases}$$

Ma l'equazione $20 = 20$ è sempre soddisfatta, non ci dà nessuna informazione su polli e conigli e quindi la possiamo omettere. Dunque il nostro sistema si riduce alla sola equazione $x = 10 - y$ che non ha una unica soluzione.

Consideriamo adesso un altro problema: *in un cortile ci sono conigli e polli, tutti integri ed in ottima salute. Sapendo che ci sono 10 teste e 21 orecchie, dire quanti sono i polli e quanti sono i conigli.*

In questo caso il sistema diventa

$$\begin{cases} x + y & = 10 \\ 2x + 2y & = 21 \end{cases}$$

Se proviamo a risolverlo con il metodo di sostituzione troviamo

$$\begin{cases} x & = 10 - y \\ 2x + 2y & = 20 \end{cases}, \qquad \begin{cases} x & = 10 - y \\ 2(10 - y) + 2y & = 21 \end{cases}, \qquad \begin{cases} x & = 10 - y \\ 20 & = 21 \end{cases}$$

In questo caso l'equazione $20 = 21$ non è mai soddisfatta (è impossibile) e quindi *l'ipotesi che il sistema abbia soluzioni porta ad una contraddizione.* In tale caso non rimane quindi che dedurre che il sistema *non ammette soluzioni.*

Riepilogando, dato un sistema di equazioni lineari, la procedura di soluzione per sostituzione porta ad una delle seguenti tre conclusioni:

(1) unica soluzione,
(2) nessuna soluzione,
(3) soluzioni multiple.

Adesso però ci sorge un dubbio: nell'applicazione del metodo di sostituzione abbiamo scelto sia l'incognita da esplicitare sia l'equazione da utilizzare allo scopo. Diverse scelte portano a diversi procedimenti; ma chi ci assicura che *diverse scelte portano alla stessa conclusione?*

Forse in questo caso la preoccupazione è eccessiva, in fin dei conti il metodo di sostituzione, qualunque strada percorra porta sempre all'insieme delle soluzioni. Ci sono però altre importanti informazioni ottenibili dal metodo di sostituzione la cui indipendenza dalle scelte non è affatto chiara.

L'Algebra lineare nasce dall'esigenza di fornire un quadro teorico alla teoria dei sistemi di equazioni lineari, in grado di fornire la risposta al precedente dubbio (e non solo).

Esempio 1.1. Cip e Ciop calcolano le soluzioni del sistema di due equazioni in tre incognite

$$\begin{cases} x + y + z & = 1 \\ x - y + z & = 0 \end{cases}$$

Applicando il metodo di sostituzione Cip trova:

$$\begin{cases} x & = 1 - y - x \\ (1 - y - z) - y + z & = 0 \end{cases}, \qquad \begin{cases} x & = 1 - y - z \\ -2y & = -1 \end{cases}, \qquad \begin{cases} y & = \frac{1}{2} \\ x & = \frac{1}{2} - z \end{cases}$$

Invece Ciop trova:

$$\begin{cases} y & = 1 - x - z \\ x - (1 - x - z) + z & = 0 \end{cases}, \qquad \begin{cases} y & = 1 - x - z \\ 2x + 2z & = 1 \end{cases},$$

$$\begin{cases} y & = 1 - x - z \\ z & = \frac{1}{2} - x \end{cases} \qquad \begin{cases} y & = 1 - x - (\frac{1}{2} - x) \\ z & = \frac{1}{2} - x \end{cases} \qquad \begin{cases} y & = \frac{1}{2} \\ z & = \frac{1}{2} - x \end{cases}$$

Le due soluzioni sono entrambe corrette e solo apparentemente diverse. Infatti Cip trova che le soluzioni sono l'insieme delle terne (x, y, z) tali che $y = 1/2$ e $x = 1/2 - z$, mentre Ciop trova che le soluzioni sono l'insieme delle terne (x, y, z) tali che $y = 1/2$ e $z = 1/2 - x$. Tali insiemi chiaramente coincidono.

Esercizi.

1.1. Risolvere i seguenti sistemi:

$$\begin{cases} 3x + y &= 5 \\ 3x + 2y &= 4 \end{cases}, \qquad \begin{cases} 2x + 7y &= 3 \\ 6x + 21y &= 4 \end{cases}, \qquad \begin{cases} 3x - 2y &= 1 \\ 12x - 8y &= 4 \end{cases}.$$

1.2. Un tale, avendo incontrato dei poveri, voleva dare 5 euro a ciascuno, ma per fare questo gli mancavano 2 euro. Allora egli diede 4 euro a ciscuno e così gli rimasero 5 euro. Quanti erano i poveri?

1.3. Determinare quattro numeri sapendo che le loro somme a tre a tre sono $9, 10, 11$ e 12.

1.4 (Eureka!)**.** Una moneta del peso 16 grammi è fatta di oro e piombo ed il suo peso in acqua è di 15 grammi. Sapendo che il peso specifico dell'oro è di $19,3$ e quello del piombo $11,3$, calcolare quanti grammi di oro contiene la moneta.

2. Sistemi ridondanti e rango

Domanda: che cosa hanno in comune i seguenti sistemi di equazioni lineari?

$$(A): \quad \begin{cases} x + y &= 1 \\ 2x - y &= 3 \\ 0 &= 0 \end{cases} \qquad (B) \quad \begin{cases} x + y &= 1 \\ 2x - y &= 3 \\ x + y &= 1 \end{cases} \qquad (C) \quad \begin{cases} x + y &= 1 \\ 2x - y &= 3 \\ 3x &= 4 \end{cases}$$

Risposta: hanno tutti più equazioni del necessario.

Spieghiamo caso per caso la risposta. Il sistema (A) contiene come terza equazione $0 = 0$ che è sempre verificata, non influisce sul sistema e può essere tolta. Nel sistema (B) la terza equazione è uguale alla prima: in particolare se una coppia di numeri x, y soddisfa le prime due equazioni di (B) allora soddisfa anche la terza. Dunque anche in questo caso la terza equazione può essere tolta.

Nel sistema (C) le tre equazioni sono diverse tra loro, tuttavia è facile osservare che la terza è la somma delle prime due: infatti $(x + y) + (2x - y) = 3x$ e $1 + 3 = 4$. Ne segue che se x, y soddisfano le prime due equazioni, allora

$$3x = (x + y) + (2x - y) = 1 + 3 = 4$$

e quindi soddisfano anche la terza: anche in questo caso la terza equazione non aggiunge alcuna ulteriore informazione e può essere tolta.

Vediamo adesso un caso leggermente più complicato:

$$(D): \quad \begin{cases} x + y &= 1 \\ 2x - y &= 3 \\ 3y &= -1 \end{cases}$$

Siccome $2(x + y) - (2x - y) = 3y$ e $2 \cdot 1 - 3 = -1$, la terza equazione è uguale al doppio della prima meno la seconda; dunque se x, y soddisfano le prime due equazioni allora

$$3y = 2(x + y) - (2x - y) = 2(1) - (3) = -1$$

e soddisfano anche la terza. Dunque la terza equazione si può omettere dal sistema senza alterare l'insieme delle soluzioni.

Definizione 2.1. Diremo che un'equazione di un sistema è *combinazione lineare* delle altre se è la somma delle rimanenti equazioni moltiplicate per opportuni numeri.

Esempio 2.2. Nel sistema

$$\begin{cases} x+y+z &= 1 \\ 2x-y-z &= 3 \\ x-y+2z &= 0 \\ 4y+7z &= -3 \end{cases}$$

la quarta equazione è combinazione lineare delle altre e più precisamente è la somma di 3 volte la prima, di -2 volte la seconda e della terza:

$$3(x+y+z) - 2(2x-y-z) + (x-y+2z) = 4y+7z, \qquad 3(1)-2(3)+(0) = -3.$$

Osserviamo inoltre che ognuna delle quattro equazioni è combinazione lineare delle altre tre: ad esempio

$$x+y+z = \frac{2}{3}(2x-y-z) - \frac{1}{3}(x-y+2z) + \frac{1}{3}(4y+7z); \qquad 1 = \frac{2}{3}(3) - \frac{1}{3}(0) + \frac{1}{3}(-3).$$

Se i valori $x, y, z, \ldots$ soddisfano un insieme finito di equazioni lineari, allora soddisfano anche ogni loro combinazione lineare. Ciò implica che ogni equazione che è combinazione lineare delle rimanenti può essere tolta dal sistema senza modificare le soluzioni.

Definizione 2.3. Diremo che un sistema di equazioni lineari è *ridondante* se qualche sua equazione è combinazione lineare delle altre.

Dunque ogni sistema ridondante può essere "semplificato" togliendo una equazione. Se dopo aver tolto un'equazione che è combinazione lineare delle altre il sistema è ancora ridondante possiamo ripetere la procedura fino a quando il sistema non è più ridondante ed il numero di equazioni di tale sistema viene detto *rango*. Uno degli obiettivi dell'algebra lineare è quello di mostrare che il rango non dipende dalla scelta delle colonne che sono tolte perché combinazione lineare delle rimanenti.

Esempio 2.4. Il rango del sistema dell'Esempio 2.2 è uguale a 3. Infatti togliendo una qualunque delle 4 equazioni otteniamo un sistema che non è ridondante. Per esempio, togliendo la quarta equazione si ottiene

$$\begin{cases} x+y+z &= 1 \\ 2x-y-z &= 3 \\ x-y+2z &= 0 \end{cases}$$

Il valore $x = 4/3$, $y = -1/3$, $z = 0$ soddisfa le prime due equazioni ma non la terza, che quindi non è combinazione lineare delle prime due. Similmente si mostra che nessuna delle tre è combinazione lineare delle rimanenti. Nel seguito vedremo metodi più semplici e pratici per determinare se un sistema è o meno ridondante.

Esempio 2.5. Consideriamo il sistema

$$\begin{cases} x+y+z &= 0 \\ 2x+y-z &= 0 \\ x-y+3z &= 0 \end{cases}$$

e cerchiamo di capire se la terza equazione è combinazione lineare delle prime due. Per definizione la terza equazione è combinazione lineare delle prime due se e solo se esistono due numeri a, b tali che

$$a(x+y+z) + b(2x+y-z) = x-y+3z, \qquad a(0)+b(0) = 0.$$

Uguagliando membro a membro i coefficienti di x, y, z otteniamo il sistema di tre equazioni

$$\begin{cases} a+2b &= 1 \\ a+b &= -1 \\ a-b &= 3 \end{cases}$$

che si dimostra facilmente essere senza soluzioni. Quindi $x - y + 3z = 0$ NON È combinazione lineare di $x + y + z = 0$ e $2x + y - z = 0$.

Esercizi.

2.1. Mostrare che in ognuno dei seguenti sistemi l'ultima equazione è combinazione lineare delle precedenti.

$$\begin{cases} x+y+z &= 0 \\ 2x+y-z &= 0 \\ 3x+2y &= 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x+2y+z &= 1 \\ 2x+y-z &= 0 \\ x-y-2z &= -1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x+2y+z+w &= 1 \\ 2x+y-z &= 0 \\ x-y-2z-w &= -1 \\ 4x+2y-2z &= 0 \end{cases}$$

3. Il metodo di Gauss

Non c'è bisogno di spiegazioni per dire che se in un sistema scambiamo l'ordine delle equazioni, allora le soluzioni non cambiano. La stessa conclusione vale se ad un sistema togliamo od aggiungiamo una equazione che è combinazione lineare delle altre.

Teorema 3.1 (Metodo di Gauss)**.** *Se un sistema viene trasformato in un altro effettuando una delle seguenti operazioni:*

1. *Scambiare l'ordine delle equazioni.*
2. *Moltiplicare un'equazione per un numero diverso da* 0.
3. *Aggiungere ad una equazione un multiplo di un'altra equazione del sistema.*

Allora i due sistemi hanno le stesse soluzioni.

Dimostrazione. La dimostrazione è abbastanza intuitiva e non richiede particolari commenti. Al fine di illustrare un tipo di ragionamento utile in matematica, diamo una dimostrazione formale del fatto che l'operazione (3) non cambia l'insieme delle soluzioni. Per semplicità espositiva consideriamo il caso dei sistemi a due equazioni e due incognite, ma le stesse argomentazioni valgono in qualsiasi generalità.

Consideriamo quindi un sistema

$$(A) \qquad \begin{cases} ax+by=\alpha \\ cx+dy=\beta \end{cases}$$

dove a, b, c, d, α e β sono numeri e x, y le incognite. Sia k un altro numero e consideriamo il sistema

$$(B) \qquad \begin{cases} ax+by=\alpha \\ (c+ka)x+(d+kb)y=\beta+k\alpha \end{cases}$$

ottenuto aggiungendo alla seconda equazione la prima moltiplicata per k. Indichiamo con S_A l'insieme delle soluzioni del sistema A, ossia l'insieme delle coppie di numeri (x, y) tali che $ax+by = \alpha$ e $cx+dy = \beta$. Similmente indichiamo con S_B l'insieme delle soluzioni del sistema B. Vogliamo dimostrare che $S_A = S_B$, e per fare ciò dimostriamo che valgono entrambe le relazioni

$$S_A \subset S_B, \qquad S_B \subset S_A,$$

dove il simbolo $\subset$ denota l'inclusione di insiemi. Quando scriviamo $X \subset Y$ intendiamo dire che X è contenuto in Y, ossia che ogni elemento di X è anche un elemento di Y: ad esempio

$$\{\text{uomini}\} \subset \{\text{mammiferi}\} \subset \{\text{animali}\}.$$

Sia dunque (x, y) una soluzione di A, vogliamo dimostrare che risolve anche (B): basta chiaramente mostrare che $(c + ka)x + (d + kb)y = \beta + k\alpha$; siccome $cx + dy = \beta$ e $ax + by = \alpha$ una semplice sostituzione ci dà

$$(c+ka)x+(d+kb)y = cx+dy+k(ax+by) = \beta+k\alpha.$$

Abbiamo quindi dimostrato che $S_A \subset S_B$. Per dimostrare che $S_B \subset S_A$ si procede alla stessa maniera: se (x, y) è una soluzione di S_B allora $ax + by = \alpha$, $(c + ka)x + (d + kb)y = \beta + k\alpha$ e quindi

$$cx + dy = (c + ka)x + (d + kb)y - k(ax + by) = \beta + k\alpha - k\alpha = \beta.$$

$\square$

Osservazione 3.2. Dimostreremo più avanti che se due sistemi nelle stesse incognite con lo stesso numero di equazioni hanno le stesse soluzioni, allora si può passare dall'uno all'altro con una successione finita di operazioni descritte nel Teorema 3.1.

Con il termine *eliminazione di Gauss* intenderemo l'applicazione di una successione finita delle operazioni descritte dal metodo di Gauss per trasformare un sistema in un altro in cui alcuni coefficienti delle incognite si annullano.

Esempio 3.3. Utilizziamo il metodo di Gauss per risolvere il sistema

$$\begin{cases} x + y + z = 3 \\ x + 2y + 3z = 6 \\ x + 4y + 9z = 14 \end{cases}$$

Possiamo annullare il coefficiente di x dalla terza equazione sottraendo la seconda equazione alla terza:

$$\begin{cases} x + y + z = 3 \\ x + 2y + 3z = 6 \\ \quad 2y + 6z = 8 \end{cases}$$

Adesso annulliamo il coefficiente di x dalla seconda equazione sottraendo la prima:

$$\begin{cases} x + y + z = 3 \\ \quad y + 2z = 3 \\ \quad 2y + 6z = 8 \end{cases}$$

Adesso annulliamo il coefficiente di y dalla terza equazione sottraendo 2 volte la seconda:

$$\begin{cases} x + y + z = 3 \\ \quad y + 2z = 3 \\ \qquad 2z = 2 \end{cases}$$

Moltiplichiamo la terza equazione per $\frac{1}{2}$:

$$\begin{cases} x + y + z = 3 \\ \quad y + 2z = 3 \\ \qquad z = 1 \end{cases}$$

Annulliamo i coefficienti di z dalla prima e dalla seconda equazione sottraendo la terza ed il suo doppio rispettivamente:

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ \quad y = 1 \\ \quad z = 1 \end{cases}$$

Infine annulliamo il coefficiente di y dalla prima sottraendo la seconda:

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \\ z = 1 \end{cases}$$

Osservazione 3.4. Non è difficile credere che il metodo di Gauss applicato alla risoluzione di un sistema ridondante fornisce ad un certo punto l'equazione $0 = 0$, mentre se applicato alla risoluzione di un sistema senza soluzioni fornisce ad un certo punto l'equazione $0 = \alpha$, con $\alpha \neq 0$. La dimostrazione rigorosa di questo fatto la vedremo più avanti, quando la teoria ci permetterà di farlo in maniera rapida ed indolore.

Esercizi.

3.1. Usare il metodo di Gauss per risolvere i sistemi

$$\begin{cases} x+y+z=1 \\ x-y+2z=1 \\ x+y+4z=1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x+y+2z=4 \\ x+2y+4z=7 \\ x+4y+10z=15 \end{cases}$$

3.2. Usare il metodo di Gauss e l'Osservazione 3.4 per stabilire quali tra i seguenti sistemi sono ridondanti e quali sono senza soluzioni:

$$\begin{cases} x+y+z=1 \\ x-y+2z=1 \\ 3x+y+4z=3 \end{cases} \qquad \begin{cases} x+y+z=1 \\ x-y+2z=1 \\ 3x+y+4z=1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x+2y+2z=0 \\ x+3y+4z=0 \\ x+5y+10z=0 \end{cases}$$

3.3. Prendere carta e penna e ricopiare le seguenti lettere minuscole dell'alfabeto greco: α (alfa), β (beta), γ (gamma), δ (delta), ε (epsilon), ζ (zeta), η (eta), θ (theta), ι (iota), κ (kappa), λ (lambda), μ (mu, mi), ν (nu, ni), ξ (xi, csi), π (pi, pigreco), ϱ (rho), σ (sigma), τ (tau), φ (fi), ψ (psi), χ (chi), ω (omega).

4. Numeri ed insiemi

Ricordiamo che alla base dell'aritmetica e della matematica ci sono i *numeri naturali*:

$$0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots.$$

Chiameremo *insieme dei numeri naturali* la collezione formata da questi numeri; la notazione che si usa è la seguente:

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, \ldots\}.$$

Anche il concetto di insieme sta alla base della matematica ed è talmente intuitivo che non richiede (per il momento) ulteriori spiegazioni; i termini *collezione, aggregato, famiglia, classe ecc.* sono spesso usati come sinonimi di insieme. Ogni insieme è caratterizzato dagli elementi appartenenti ad esso. Ad esempio il numero 5 è un elemento dell'insieme dei numeri naturali, ossia il numero 5 *appartiene* all'insieme $\mathbb{N}$. Talvolta, e quando è possibile, indicheremo un insieme elencandone gli elementi racchiusi tra parentesi graffe: ad esempio $\{1, 2, 6\}$ rappresenta l'insieme i cui elementi sono i numeri $1, 2$ e 6.

Se a è un elemento dell'insieme A si scrive anche $a \in A$ (e se non appartiene, si scrive $a \notin A$), e si legge *a appartiene* ad A, o anche A *contiene a*. Ad esempio

$$2 \in \mathbb{N}, \quad \pi \notin \mathbb{N}, \quad 5 \in \mathbb{N}, \quad -3 \notin \mathbb{N}.$$

Un altro insieme di numeri che merita attenzione è quello degli *interi*: per ottenerlo basta aggiungere ad $\mathbb{N}$ tutti i numeri interi negativi. Useremo il simbolo

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}.$$

Qualche volta conviene togliere ai numeri naturali ed agli interi lo zero; per distinguere useremo la notazione

$$\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, \ldots\}, \qquad \mathbb{Z}^* = \{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots\}.$$

Chiameremo $\mathbb{N}^*$ l'insieme degli *interi positivi* e $\mathbb{Z}^*$ l'insieme degli *interi non nulli.*

Notiamo che gli elementi dell'insieme $\mathbb{N}^*$ stanno anche nell'insieme $\mathbb{N}$. Quando tutti gli elementi di un insieme A sono anche elementi dell'insieme B scriveremo $A \subset B$ e diremo che *A è un sottoinsieme di B*.

Possiamo quindi scrivere $\mathbb{N}^* \subset \mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$. Un modo equivalente di esprimere la stessa cosa è

$$n \in \mathbb{N}^* \implies n \in \mathbb{N} \implies n \in \mathbb{Z},$$

dove il simbolo $\implies$ significa *implica*. Se $\mathcal{P}$ e $\mathcal{Q}$ sono due proposizioni[1], la formula $\mathcal{P} \implies \mathcal{Q}$ (che si legge "$\mathcal{P}$ implica $\mathcal{Q}$") è un modo abbreviato per dire che se $\mathcal{P}$ è vero, allora è vero anche $\mathcal{Q}$. Per esigenze grafiche scriveremo talvolta $\mathcal{Q} \Longleftarrow \mathcal{P}$ con lo stesso significato di $\mathcal{P} \implies \mathcal{Q}$.

Se A e B sono due insiemi indichiamo con $A \cap B$ la loro *intersezione* e con $A \cup B$ la loro *unione*. Per definizione, $A \cap B$ è l'insieme formato dagli elementi che appartengono sia ad A che a B: ad esempio

$$\{\text{numeri pari}\} \cap \{\text{numeri compresi tra 1 e 5}\} = \{2, 4\}.$$

L'unione $A \cup B$ è l'insieme formato dagli elementi che appartengono ad A oppure a B, intendendo con questo che possono appartenere ad entrambi: ad esempio

$$\{1, 2, 3\} \cup \{3, 4\} = \{1, 2, 3, 4\}.$$

Se A e B non hanno elementi in comune, la loro intersezione è l'insieme vuoto: tale insieme viene indicato con il simbolo $\emptyset$. Ad esempio

$$\{\text{numeri pari}\} \cap \{\text{numeri dispari}\} = \emptyset.$$

Osservazione 4.1. Per ogni insieme B vale $\emptyset \subset B$. Infatti, la condizione da soddisfare affinché $A \subset B$ è che ogni elemento di A appartenga a B. Se A non ha elementi, allora non ci sono condizioni da verificare e quindi $\emptyset \subset B$ è sempre vera. Viceversa, la relazione $B \subset \emptyset$ è vera se e solo se B è l'insieme vuoto.

Se A è un insieme, quando si vuole indicare il sottoinsieme formato dagli elementi che godono di una determinata proprietà si usa talvolta la notazione

$$\{a \in A \mid a \text{ soddisfa la determinata proprietà}\}.$$

Ad esempio:

$$\mathbb{N} = \{n \in \mathbb{Z} \mid n \geq 0\},$$
$$\{\text{numeri pari}\} = \{n \in \mathbb{Z} \mid n \text{ è divisibile per } 2\},$$
$$\{\text{quadrati}\} = \{n \in \mathbb{Z} \mid \text{esiste } a \in \mathbb{Z} \text{ tale che } n = a^2\},$$
$$\{\text{numeri sarchiaponici}\} = \{n \in \mathbb{Z} \mid \text{esiste un sarchiapone ad } n \text{ zampe}\}.$$

Esercizi.

4.1. Convincetevi del fatto che per ogni coppia di insiemi A, B valgono le inclusioni

$$A \cap B \subset A, \qquad A \subset A \cup B.$$

4.2. Siano A, B insiemi. Mostrare che valgono le uguaglianze

$$A \cup (A \cap B) = A, \qquad A \cap (A \cup B) = A.$$

Mostrare inoltre che vale $A \subset B$ se e solo se vale $A \cap B = A$ se e solo se vale $A \cup B = B$.

4.3. Siano A, B, C insiemi. Mostrare la validità delle seguenti affermazioni:

(1) Se $A \subset B$ e $B \subset C$, allora $A \subset C$.
(2) Se $A \subset C$ e $B \subset C$, allora $A \cup B \subset C$.
(3) Se $A \subset B$ e $A \subset C$, allora $A \subset B \cap C$.

4.4. Mostrare che:

$$\{n \in \mathbb{Z} \mid n \text{ è divisibile per } 6\} = \{n \in \mathbb{Z} \mid n \text{ è divisibile per } 2\} \cap \{n \in \mathbb{Z} \mid n \text{ è divisibile per } 3\},$$
$$\{n \in \mathbb{Z} \mid n \text{ non è divisibile per } 6\} = \{n \in \mathbb{Z} \mid n \text{ è dispari}\} \cup \{n \in \mathbb{Z} \mid n \text{ non è divisibile per } 3\}.$$

[1] In matematica, per proposizione si intende una qualunque affermazione che può essere vera o falsa (ma non vera e falsa contemporaneamente).

5. Il principio di induzione matematica

Supponiamo di avere, per ogni intero positivo n una proposizione $\mathcal{A}_n$ relativa ad n. Ad esempio $\mathcal{A}_n$ potrebbe essere "Un segmento può essere diviso in n parti uguali" oppure "Il numero n si può scrivere come somma di quattro quadrati".

Un altro esempio di proposizione $\mathcal{A}_n$ potrebbe essere "Il numero $3n$ è pari": chiaramente $\mathcal{A}_n$ è vera se n è pari ed è falsa per n dispari.

In tali ipotesi il Principio di induzione *afferma che:*

(1) *se la proposizione $\mathcal{A}_1$ è vera,*
(2) *se in base a qualche ragionamento matematico dimostriamo che, se $\mathcal{A}_n$ è vera, per n numero qualsiasi, allora segue la validità di $\mathcal{A}_{n+1}$.*

Allora $\mathcal{A}_n$ è vera per ogni n.

Vediamo adesso alcune applicazioni del principio di induzione.

Esempio 5.1. Sia $\mathcal{A}_n$ la proposizione: *esistono due interi positivi a, b tali che* $5a+6b = 35+n$. La proposizione $\mathcal{A}_1$ è vera, in quanto $6 \cdot 5 + 6 = 36$. Supponiamo adesso $n > 1$ e che $\mathcal{A}_{n-1}$ sia vera; esistono quindi $a, b > 0$ tali che $5a + 6b = 35 + n - 1$. Se $a > 1$ allora

$$5(a-1) + 6(b+1) = 5a + 6b + 1 = 35 + n.$$

Se invece $a = 1$, allora $6b = 30 + n - 1$ e quindi $b \geq 5$. Possiamo allora scrivere $5a + 6b = 5(a+6) + 6(b-5) = 35 + n - 1$ e ragionando come sopra $5(a+5) + 6(b-4) = 35 + n$. Abbiamo quindi dimostrato $\mathcal{A}_n$ e per il principio di induzione $\mathcal{A}_n$ è vera per ogni n.

Esempio 5.2. Dimostriamo che per ogni intero $n > 0$ vale $2^n \geq n + 1$. In questo caso la proposizione $\mathcal{A}_1$ è la disugualianza $2^1 \geq 1 + 1$, la proposizione $\mathcal{A}_2$ è la disugualianza $2^2 \geq 2 + 1$ eccetera. Siccome $2^1 = 2 \geq 1 + 1$, la proposizione $\mathcal{A}_1$ è vera.

Supponiamo adesso che, per un intero qualsiasi n la proposizione $\mathcal{A}_n$ sia vera, ossia che $2^n \geq n + 1$: come detto si tratta per il momento di un'ipotesi, in quanto la verità o la falsità di $\mathcal{A}_n$ sarà stabilita al termine del procedimento. Supponiamo quindi $2^n \geq n + 1$, allora si ha:

$$2^{n+1} = 2^n + 2^n \geq 2^n + n + 1 \geq (n+1) + 1$$

dove nella disuguaglianza a destra abbiamo unato il fatto che $2^n \geq 1$. Dunque supponendo vera $\mathcal{A}_n$ (ossia $2^n \geq n + 1$) abbiamo dimostrato che anche $\mathcal{A}_{n+1}$ è vera (ossia $2^{n+1} \geq n + 2$) e per il principio di induzione $\mathcal{A}_n$ è vera per ogni n.

Esempio 5.3. Dimostriamo che per ogni numero reale $t > -1$ e per ogni numero naturale $n > 0$ vale la disuguaglianza

$$(1+t)^n \geq 1 + nt.$$

In questo caso la proposizione $\mathcal{A}_n$ è $(1+t)^n \geq 1 + nt$: la proposizione $\mathcal{A}_1$ diventa $1+t \geq 1+t$ che è ovviamente vera. Supponiamo adesso vero che $(1+t)^n \geq 1 + nt$, allora

$$(1+t)^{n+1} = (1+t)(1+t)^n = (1+t)^n + t(1+t)^n \geq 1 + nt + t(1+t)^n.$$

Se riusciamo a dimostrare che $t(1+t)^n \geq t$ allora dalla disuguaglianza precedente segue che $(1+t)^{n+1} \geq 1+(n+1)t$ ed abbiamo provato la validità di $\mathcal{A}_{n+1}$. Per dimostrare che $t(1+t)^n \geq t$ per ogni $t > -1$ ed ogni $n > 0$ trattiamo separatamente i casi $t \geq 0$ e $-1 < t < 0$. Se $t \geq 0$ allora $(1+t)^n \geq 1$ e quindi $t(1+t)^n \geq t \cdot 1 = t$. Se invece $-1 < t < 0$ allora $0 < (1+t)^n < 1$ e, siccome t è negativo si ha $t(1+t)^n > t$.

Esempio 5.4. Dimostriamo che per ogni n la somma $1+2+\cdots+n$ dei primi n numeri naturali è uguale a $\dfrac{n(n+1)}{2}$. Tale affermazione è vera per $n = 1$, mentre se la supponiamo vera per n si ha

$$1 + 2 + \cdots + n + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{n^2 + n + 2(n+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

Esempio 5.5. Dimostriamo che per ogni intero $n > 0$ vale la disuguaglianza

$$5^n \geq 3^{n-1}(2n+3).$$

Per $n = 1$ tale disuguaglianza diventa $5 \geq 5$ che è dunque vera. Supponiamola vera per un qualsiasi intero positivo n e scriviamo

$$\begin{aligned} 5^{n+1} = 3\cdot 5^n + 2\cdot 5^n &\geq 3\cdot 3^{n-1}(2n+3) + 2\cdot 3^{n-1}(2n+3) \\ &\geq 3^n(2n+3) + 3^{n-1}4n + 2\cdot 3^n \\ &\geq 3^n(2n+5) + 3^{n-1}4n \\ &\geq 3^n(2(n+1)+3) \end{aligned}$$

Esempio 5.6. Dimostriamo che per ogni n la somma $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2$ dei quadrati dei primi n numeri naturali è uguale a $\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$. Tale affermazione è vera per $n = 1$, mentre se la supponiamo vera per n si ha

$$1 + 2^2 + \cdots + n^2 + (n+1)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2$$

Lasciamo al lettore il compito di verificare l'uguaglianza

$$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}.$$

Esercizi.

5.1. Sia q un numero diverso da 1. Usare il principio di induzione per mostrare che la somma delle prime n potenze di q è uguale a

$$q + q^2 + \cdots + q^n = q\frac{q^n - 1}{q - 1}$$

5.2 $(*)$**.** Usare la disuguaglianza dell'Esempio 5.3 ed il principio di induzione per dimostrare che per ogni intero $n > 0$ vale

$$\frac{\left(1 + \dfrac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^{n}} = \left(\frac{1 + \dfrac{1}{n+1}}{1 + \dfrac{1}{n}}\right)^{n} \left(1 + \frac{1}{n+1}\right) \geq 1$$

5.3 $(*)$**.** Il numero di coppie (a, b) di interi non negativi tali che $a + b = n$ è chiaramente uguale a $n + 1$ (le coppie sono $(n, 0), (n-1, 1), \ldots, (0, n)$).

Usare questo fatto ed il principio di induzione per mostrare che il numero di terne (a, b, c) di interi non negativi tali che $a + b + c = n$ è uguale a $\dfrac{(n+1)(n+2)}{2}$.

6. Attenti all'errore

Il ragionamento matematico si presta all'errore ed un ragionamento errato può portare a conseguenze false, anche se si parte da premesse vere. Vedremo adesso alcuni esempi di ragionamenti errati che portano a conclusioni paradossali, e nei quali si capisce subito che qualcosa non va. Di solito però le conseguenze di un ragionamento errato sono molto verosimili e a prima vista non hanno nulla di sbagliato. Per questo è utile imparare a riconoscere la correttezza di una dimostrazione[2] a prescindere dal risultato finale.

[2] Le dimostrazioni, in quanto opere dell'intelletto umano, si dividono in tre categorie: quelle corrette, quelle sbagliate e quelle che non sono nemmeno sbagliate. Una dimostrazione non è nemmeno sbagliata quando è vuota o talmente illeggibile e lacunosa da non consentire una sua verifica da parte di chi la legge. Se una dimostrazione sbagliata può contenere comunque idee interessanti ed originali, quella che non è nemmeno sbagliata è solo da buttare nel cassonetto!

Esempio 6.1. Dimostriamo che tutti i bambini hanno gli occhi dello stesso colore. I bambini sono in numero finito che però non conosciamo; indichiamo tale numero con n e se dimostriamo che per ogni n vale l'affermazione $\mathcal{A}_n$: *dato un insieme di n bambini, hanno tutti lo stesso colore degli occhi*, allora abbiamo dimostrato quello che vogliamo.

La proposizione $\mathcal{A}_1$ è certamante vera, un solo bambino ha gli occhi di un solo colore. Prendiamo adesso n bambini, mettiamoli i riga e prendiamo i primi $n-1$; per l'ipotesi induttiva hanno gli occhi dello stesso colore. Lo stesso si applica se prendiamo gli ultimi $n-1$ e di conseguenza tutti hanno lo stesso colore defli occhi.

L'errore consiste chiaramente nel fatto che la dimostrazione di $\mathcal{A}_{n-1} \implies \mathcal{A}_n$ che abbiamo dato funziona solo per $n > 2$, rimane quindi non dimostrato che $\mathcal{A}_1 \implies \mathcal{A}_2$.

Esempio 6.2. Utilizziamo il principio di induzione per dimostrare che $5 = 8$. dati due interi positivi n, m indichiamo con $\max(n, m)$ il più grande dei due: ad esempio $\max(2, 3) = 3$. Per ogni numero naturale n Indichiamo con $\mathcal{A}_n$ l'affermazione *se vale* $\max(a, b) = n$ *allora* $a = b$.

La $\mathcal{A}_1$ è certamente vera, infatti vale $\max(a, b) = 1$ se e solo se $a = b = 1$. Supponiamo adesso che $\mathcal{A}_{n-1}$ sia vera e dimostriamo che vale anche $\mathcal{A}_n$: supponiamo che si abbia $\max(a, b) = n$, allora $\max(a-1, b-1) = n-1$ e, siccome abbiamo assunto $\mathcal{A}_{n-1}$ vera si ha $a-1 = b-1$ e quindi $a = b$.

Per il principio di induzione $\mathcal{A}_n$ è vero per ogni n, anche $\mathcal{A}_8$ è vero e quindi siccome $\max(5, 8) = 8$ si ha $5 = 8$.

L'errore fatto nel ragionamento è un esempio di *dicto simpliciter*[3]. Per dimostrare $\mathcal{A}_1$ abbiamo implicitamente assunto che a, b fossero entrambi maggiori od uguali ad 1 e tale restrizione può impedire le sottrazioni fatte nella dimostrazione di $\mathcal{A}_{n-1} \implies \mathcal{A}_n$.

Esercizi.

6.1. È vero o falso che se $A \subset \mathbb{Z}$ è un sottoinsieme con la proprietà che $a+1 \in A$ e $a-1 \in A$ per ogni $a \in A$, allora $A = \mathbb{Z}$?

6.2. Nel famoso detto *morto un Papa se ne fa un altro* si nasconde un chiaro esempio di dicto simpliciter. Sapete scovarlo?

7. Applicazioni tra insiemi

Definizione 7.1. Una *applicazione* da un insieme A ad un insieme B è una legge, di qualunque natura, che ad ogni elemento di A associa uno ed un solo elemento di B. Indicheremo un'applicazione da A in B con il simbolo

$$f\colon A \to B, \qquad a \mapsto f(a),$$

dove, per ogni $a \in A$, l'elemento $f(a) \in B$ è quello associato ad a tramite l'applicazione medesima.

Esempio 7.2. Ecco alcuni esempi di applicazioni:

(1)
$$f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}, \qquad n \mapsto f(n) = 2n$$
è l'applicazione che ad ogni numero naturale associa il suo doppio.

(2)
$$f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{N}, \qquad n \mapsto f(n) = n^2$$
è l'applicazione che ad ogni numero intero associa il suo quadrato.

(3)
$$f\colon \{\text{Uomini}\} \to \{\text{Date}\} \qquad f(x) = \text{data di nascita di } x,$$
è un'applicazione.

[3]Applicazione di una regola generale ad una situazione particolare in condizioni che rendono quella regola inapplicabile.

Esempio 7.3. Dato un qualunque insieme A, l'applicazione *identità*

$$Id\colon A \to A, \qquad Id(a) = a,$$

è l'applicazione che associa ad ogni elemento se stesso. Più in generale se $B \subset A$, l'applicazione di *inclusione* è definita come

$$i\colon B \to A, \qquad i(b) = b.$$

In altri termini se $b \in B$, allora $i(b)$ è lo stesso elemento pensato però come appartenente all'insieme A.

Definizione 7.4. Due applicazioni f, g da un insieme A ad un insieme B sono *uguali* se $f(a) = g(a)$ per ogni $a \in A$. Conseguentemente sono diverse se esiste almeno un elemento $a \in A$ tale che $f(a) \neq g(a)$.

Esempio 7.5. Le due applicazioni

$$f, g\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}, \qquad f(n) = n^2, \quad g(n) = (n-1)^2 + 2n - 1$$

sono uguali. Infatti per ogni numero intero n vale

$$g(n) = (n-1)^2 + 2n - 1 = n^2 - 2n + 1 + 2n - 1 = n^2 = f(n).$$

Esempio 7.6. Le due applicazioni

$$f, g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}, \qquad f(n) = n + 1, \quad g(n) = 2 + \sqrt{(n-1)^2}$$

sono diverse. Infatti $f(0) = 1$, mentre $g(0) = 3$. (Si noti che $f(n) = g(n)$ per ogni $n > 0$.)

Definizione 7.7. Un'applicazione $f\colon A \to B$ si dice *iniettiva* se manda elementi distinti di A in elementi distinti di B. In altri termini f è iniettiva se vale l'implicazione

$$a \neq b \implies f(a) \neq f(b),$$

o equivalentemente se vale

$$f(a) = f(b) \implies a = b.$$

Conseguentemente, f non è iniettiva se esistono $a, b \in A$ tali che $a \neq b$ e $f(a) = f(b)$.

Esempio 7.8. L'applicazione

$$f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}, \qquad f(n) = n + 1$$

è iniettiva. Per provarlo bisogna dimostrare che se $f(n) = f(m)$, allora $n = m$. Questo è facile: se $f(n) = f(m)$, allora $n + 1 = m + 1$ e quindi $n = m$.

Esempio 7.9. L'applicazione

$$f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}, \qquad f(n) = n^2$$

non è iniettiva. Per provarlo è sufficiente trovare due numeri interi n, m tali che $n \neq m$ e $f(n) = f(m)$. Anche questo è facile: infatti $f(1) = f(-1)$.

Definizione 7.10. Chiameremo *immagine* di un'applicazione $f\colon A \to B$, e la denoteremo con $f(A)$, l'insieme degli elementi di B che sono del tipo $f(a)$ per qualche $a \in A$. Equivalentemente

$$f(A) = \{b \in B \mid \text{ esiste } a \in A \text{ tale che } b = f(a)\}.$$

Chiaramente $f(A)$ è un sottoinsieme di B.

Esempio 7.11. L'immagine dell'applicazione $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $f(n) = n + 1$, è l'insieme degli interi positivi, ossia $f(\mathbb{N}) = \mathbb{N}^*$.

Definizione 7.12. Un'applicazione $f\colon A \to B$ si dice *surgettiva* se ogni elemento di B è l'immagine di almeno un elemento di A. Equivalentemente $f\colon A \to B$ è surgettiva se $f(A) = B$.

Esempio 7.13. L'applicazione

$$f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}, \qquad f(n) = n + 1$$

è surgettiva. Infatti per ogni $n \in \mathbb{Z}$ si ha $n = f(n-1)$ e quindi $n \in f(\mathbb{Z})$.

Esempio 7.14. L'applicazione

$$f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}, \qquad f(n) = n^2$$

non è surgettiva. Per provarlo è sufficiente trovare un intero n che non appartiene all'immagine di f. Questo non potrebbe essere più facile: infatti $-1 \notin f(\mathbb{Z})$.

Definizione 7.15. Un'applicazione si dice *bigettiva* se è contemporaneamente iniettiva e surgettiva.

Esercizi.

7.1. Per ciascuna delle seguenti applicazioni, dire se è iniettiva, se è surgettiva e se è bigettiva:

(1) $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $f(n) = n^2$;
(2) $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $f(n) = 2n - 1$;
(3) $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $f(n) = n^2 + n + 1$.

7.2. Siano $f\colon A \to B$ e $g\colon B \to A$ due applicazioni tali che $g(f(a)) = a$ per ogni $a \in A$. Dimostrare che f è iniettiva e che g è surgettiva.