Prova scritta di Algebra lineare del 6 luglio 2011

Esercizio 1. Per quali valori del parametro reale k il sistema

$$\begin{cases} (1+k)x + 2y + 2z = 1 \\ 2x + (1+k)y + 2z = 1 \\ (1-k)x - y + z = 1 \end{cases}$$

ha infinite soluzioni?

Esercizio 2. Si consideri l'applicazione lineare $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definita da

$$\varphi \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x+2y \\ 4x+2y \\ 9x+5y \end{pmatrix}$$

Si determini la matrice che rappresenta φ rispetto alla base

$$\mathcal{B}_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

di $\mathbb{R}^2$ ed alla base

$$\mathcal{B}_3 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$$

di $\mathbb{R}^3$.

Esercizio 3. Sia $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare definita dalla matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -4 & -7 & -6 \\ 5 & 7 & 5 \end{pmatrix}$$

e sia $V \subset \mathbb{R}^3$ il piano di equazione $x + y + z = 0$. Mostrare che $f(V) \subset V$ e calcolare il determinante della restrizione di $f_{|V}\colon V \to V$.

Esercizio 4. Data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 9 & 7 & 3 \\ -9 & -7 & -4 \\ 4 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$

Determinare:

(1) Il polinomio caratteristico di A;
(2) Gli autovalori di A e le rispettive molteplicità algebriche e geometriche;
(3) Il polinomio minimo di A.

Dire inoltre, motivando la risposta, se A è diagonalizzabile e se esiste una matrice $B \in M_{3,3}(\mathbb{R})$ nilpotente che abbia rango 2 e prima riga uguale a $(7, 7, 3)$.

Esercizio 5. Sia A una matrice 4×4 tale che $A^3 = A^2$. Dimostrare che

$$\operatorname{Ker} A^2 \cap Im(A) = \operatorname{Ker} A \cap Im(A).$$