1. Algebra lineare: esercizi Natalizi 2010

Esercizio 1. Calcolare i prodotti $(AB)^2$ e $(BA)^2$, dove
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 2. Per quali valori di $t \in \mathbb{R}$ i quattro vettori
$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ t \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ t^2 \end{pmatrix}, \quad v_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ t^3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$
sono linearmente dipendenti?

Esercizio 3. Nello spazio vettoriale $M_{4,4}(\mathbb{R})$ delle matrici 4×4 a coefficienti reali, per ogni coppia di indici $i, j = 1, \ldots, 4$ indichiamo con $U_{ij} \subseteq M_{4,4}(\mathbb{R})$ l'insieme delle matrici tali che la somma dei coefficienti della riga i è uguale al doppio della somma dei coefficienti della colonna j, cioè
$$U_{ij} = \left\{ (a_{ij}) \in M_{4,4}(\mathbb{R}) \;\middle|\; \sum_{h=1}^{4} a_{ih} = 2 \sum_{h=1}^{4} a_{hj} \right\}.$$
Dimostrare che ogni U_{ij} è un sottospazio vettoriale di dimensione 15 e determinare la dimensione dell'intersezione dei 16 sottospazi U_{ij}.

Esercizio 4. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione m e sia $U_1, U_2, \ldots$ una successione di sottospazi vettoriali di dimensione $m-1$. Dimostrare per induzione su n che la dimensione di $U_1 \cap U_2 \cap \cdots \cap U_n$ è maggiore od uguale a $m - n$.

Esercizio 5. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione n e $W \subseteq V$ un sottospazio di dimensione $m < n$. Dimostrare che W si può scrivere come intersezione di $n - m$ sottospazi vettoriali di dimensione $n - 1$. (Sugg.: estendere una base di W ad una base di V.)

Esercizio 6. Nello spazio vettoriale $M_{4,4}(\mathbb{R})$ delle matrici 4×4 a coefficienti reali, per ogni coppia di indici $i, j = 1, \ldots, 4$ indichiamo con $V_{ij} \subseteq M_{4,4}(\mathbb{R})$ l'insieme delle matrici tali che la somma dei coefficienti della riga i è uguale alla somma dei coefficienti della colonna j.

(1) Dimostrare che V_{ij} è un sottospazio vettoriale e se ne calcoli la dimensione. (Suggerimento: scrivere V_{ij} come il nucleo di un'opportuna applicazione lineare surgettiva.)
(2) Siano V l'intersezione dei 16 sottospazi V_{ij} e T il sottospazio delle matrici triangolari superiori. Provare che $V + T = M_{4,4}(\mathbb{R})$.
(3) Calcolare la dimensione di V.

Esercizio 7. Sia $F\colon \mathbb{R}^{350} \to \mathbb{R}^{250}$ un'applicazione lineare e sia $V \subseteq \mathbb{R}^{350}$ un sottospazio vettoriale tale che
$$\dim V = 300, \qquad \dim(V \cap \ker(F)) = 50.$$
Calcolare le dimensioni di $F(V)$ e di $V + \ker(F)$. Dire se F è surgettiva.

Esercizio 8. Sia A una matrice quadrata 4×4 tale che $A^2 = I$. Dimostrare che:

(1) $A - I$ e $A + I$ non sono entrambe invertibili.
(2) $\ker(A + I) \cap \ker(A - I) = 0$.
(3) $Ax - x \in \ker(A + I)$ per ogni $x \in \mathbb{K}^4$.
(4) rango$(A - I)$+rango$(A + I) = 4$.

Marco Manetti, December 19, 2010

Esercizio 9. Siano

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ -2 & 1 & 6 \\ 0 & 2 & 7 \end{pmatrix}$$

Calcolare la traccia di ABA (riflettere sulle proprietà della traccia prima di mettersi a fare i conti). Cosa si può dire della traccia di $AB^{350}A$?

Esercizio 10. Indichiamo con $E_i \in M_{n,1}(\mathbb{K})$ la matrice corrispondente all'i-esimo vettore della base canonica di $\mathbb{K}^n$, ossia

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad E_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, E_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

Per ogni coppia di indici i, j descrivere, in funzione di i e j, i prodotti

$$\delta_{ij} = E_j^T E_i \in \mathbb{K}, \qquad E_{ij} = E_i E_j^T \in M_{n,n}(\mathbb{K})$$

e mostrare che le n^2 matrici E_{ij} sono una base di $M_{n,n}(\mathbb{K})$. Dire inoltre in quali casi la matrice $E_{ij}E_{pq} - E_{pq}E_{ij}$ è diagonale.

Esercizio 11. Sia

$$D = \begin{pmatrix} d_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & d_n \end{pmatrix}$$

una matrice diagonale. Provare che se $d_i \neq d_j$ per ogni $i \neq j$, allora le matrici A che commutano con D (ossia $AD = DA$) sono tutte e sole le matrici diagonali. Provare inoltre che le n matrici $I, D, D^2, \dots, D^{n-1}$ sono linearmente indipendenti in $M_{n,n}(\mathbb{K})$.

Esercizio 12. Sia U una matrice che commuta con tutte le matrici. Dimostrare che U è un multiplo scalare dell'identità.

Esercizio 13. Dati due interi positivi n, p si consideri la matrice $A = (a_{ij})$, dove

$$a_{ij} = (ni + j)p + 1, \qquad i, j = 1, \dots, n.$$

Per quali valori di n, p il determinante di A è uguale a -1250?

Esercizio 14. Calcolare polinomio caratteristico, autovalori reali e rispettivi autovettori delle seguenti matrici:

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 3 \\ -1 & -3 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 5 & 6 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 15. Siano $A \in M_{n,n}(\mathbb{K})$, $B \in M_{m,m}(\mathbb{K})$ e $C \in M_{n,m}(\mathbb{K})$. Utilizzare lo sviluppo di Laplace e le proprietà del determinante per dimostrare che

$$\begin{vmatrix} A & C \\ 0 & B \end{vmatrix} = |A||B|, \qquad \begin{vmatrix} 0 & B \\ A & C \end{vmatrix} = (-1)^{nm}|A||B|.$$

Esercizio 16 (non banale)**.** Sia B una matrice quadrata a coefficienti reali. Dimostrare che B e B^TB hanno lo stesso nucleo e, di conseguenza, lo stesso rango. Trovare una matrice 2×2 a coefficienti complessi per cui la precedente proprietà non vale.

Esercizio 17 (non banale)**.** Dimostrare che una matrice quadrata ha traccia nulla se e solo se la si può scrivere come combinazione lineare di matrici del tipo $AB - BA$.

Esercizio 18 (non banale)**.** Sia $A = (a_{ij}) \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ una matrice simmetrica tale che $a_{ij} \leq 0$ se $i \neq j$ e $\sum_j a_{ij} > 0$ per ogni i. Dimostrare che per ogni vettore $x \in \mathbb{R}^n$ si ha $x^T Ax \geq 0$ e vale $x^T Ax = 0$ se e solo se $x = 0$.

Esercizio 19. Sia $V = \mathbb{K}[t]_{\leq n}$ lo spazio vettoriale dei polinomi di grado $\leq n$ e siano $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{K}$ numeri distinti. Provare che:

(1) I polinomi
$$f_0 = 1, \quad f_1 = (t - a_1), \ldots, \; f_i = \prod_{j=1}^{i}(t - a_j), \quad i = 0, \ldots, n,$$
formano una base di V

(2) I polinomi
$$g_i = (t - a_i)^n, \qquad i = 0, \ldots, n,$$
formano una base di V.

(3) I polinomi
$$g_i = (t - a_0) \cdots (t - a_{i-1})(t - a_{i+1}) \cdots (t - a_n), \qquad i = 0, \ldots, n,$$
formano una base di V.

Esercizio 20. Sia $f: V \to V$ lineare tale che $f(V) \cap \ker f = 0$. Provare che f e f^2 hanno lo stesso rango.

Esercizio 21. Siano $f: V \to W$ e $g: W \to V$ due applicazioni lineari. Provare che fg e gf hanno la stessa traccia. Mostrare con un esempio che in generale il determinante di fg è diverso dal determinante di gf.

Esercizio 22. Siano $f, g: V \to W$ due applicazioni lineari. Provare che
$$(f + g)(V) \subset f(V) \subset g(V)$$
e dedurre che $rango(f + g) \leq rango(f) + rango(g)$.

Esercizio 23. Provare che ogni matrice di rango r può essere scritta come somma di r matrici di rango 1.

Esercizio 24. Sia $C \in M_{n,m}(\mathbb{R})$. Dimostrare che:

(1) è possibile scrivere, in maniera non unica, $C = \sum_{i=1}^{r} a_i A_i$, dove $a_i \in \mathbb{R}$, $B_i \in M_{n,m}(\mathbb{Q})$ e $r \leq nm$.

(2) nella situazione del punto precedente, provare che se r è il minimo possibile, allora le matrici A_i sono linearmente indipendenti in $M_{n,m}(\mathbb{Q})$ ed i numeri a_i sono linearmente indipendenti su $\mathbb{Q}$.

Esercizio 25. Sia $A \in M_{n,n}(\mathbb{Q})$ una matrice a coefficienti razionali e sia r la dimensione su $\mathbb{Q}$ del sottospazio
$$V = \{B \in M_{n,n}(\mathbb{Q}) \mid AB = BA\}.$$
Sia $C \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ tale che $AC = CA$. Dimostrare che esistono al più r coefficienti di C linearmente indipendenti su $\mathbb{Q}$.