ENDOMORFISMI. NOTE DI ALGEBRA LINEARE 2010-11

MARCO MANETTI: 15 GENNAIO 2011

1. Endomorfismi e sottospazi invarianti

Definizione 1.1. Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$. Un **endomorfismo** di V è una qualsiasi applicazione lineare

$$f\colon V \longrightarrow V.$$

In questo capitolo supporremo, salvo avviso contrario, che tutti gli spazi vettoriali abbiano dimensione finita. Ricordiamo che gli endomorfismi di V formano uno spazio vettoriale $\mathcal{L}(V,V)$ di dimensione $(\dim V)^2$. La composizione di due endomorfismi di V è ancora un endomorfismo di V.

Se $f,g\colon V\to V$ chiameremo semplicemente *prodotto* il prodotto di composizione e scriveremo fg per indicare $f\circ g$, ossia $fg(v)=f(g(v))$ per ogni vettore $v\in V$. Naturalmente, sono endomorfismi tutte le potenze di f:

$$f^k : V \longrightarrow V, \qquad k\geq 0,$$

dove si pone per convenzione $f^0=I$ il morfismo identità, ossia $f^0(v)=v$ per ogni $v\in V$; con tale convenzione vale la formula $f^hf^k=f^{h+k}$ per ogni $h,k\geq 0$.

Definizione 1.2. Siano $f\colon V\to V$ un endomorfismo e $U\subset V$ un sottospazio vettoriale. Diremo che U è un sottospazio **f-invariante** se $f(U)\subset U$.

Esempio 1.3. Sia $f\colon V\to V$ un endomorfismo, allora per ogni $k\geq 0$ i sottospazi $\operatorname{Ker}(f^k)$ e $f^k(V)$ sono f-invarianti. Sia infatti $v\in\operatorname{Ker}(f^k)$, allora la formula

$$f^k(f(v))=f^{k+1}(v)=f(f^k(v))=f(0)=0$$

prova che anche $f(v)\in\operatorname{Ker}(f^k)$. Similmente se $v\in f^k(V)$ vuol dire che esiste $w\in V$ tale che $v=f^k(w)$ e quindi

$$f(v)=f(f^k(w))=f^k(f(w))\in f^k(V).$$

Per uso futuro, enunciamo sotto forma di lemma una semplice generalizzazione dell'esempio precedente.

Lemma 1.4. *Siano $f,g\colon V\to V$ due endomorfismi che commutano tra loro, ossia tali che $fg=gf$. Allora $\operatorname{Ker}(g)$ e $g(V)$ sono sottospazi f-invarianti.*

Dimostrazione. Se $g(v)=0$ allora $g(f(v))=f(g(v))=f(0)=0$ e se $v=g(w)$ allora $f(v)=f(g(w))=g(f(w))\in g(V)$. $\square$

Proposizione 1.5. *Sia $f\colon V\to V$ un endomorfismo lineare. Allora:*

(1) *Per ogni $h\geq 0$ vale*

$$\operatorname{Ker}(f^h)\subseteq\operatorname{Ker}(f^{h+1}), \qquad f^{h+1}(V)\subseteq f^h(V).$$

(2) *Si ha $\operatorname{Ker}(f^h)=\operatorname{Ker}(f^{h+1})$ se e solo se $f^{h+1}(V)\subseteq f^h(V)$.*

(3) *La successione di numeri naturali $\alpha_h=\dim f^h(V)-\dim f^{h+1}(V)$ è decrescente, ossia $\alpha_0\geq\alpha_1\geq\alpha_2\geq\cdots$.*

(4) *Sia $k\leq\dim V$ il più piccolo numero naturale tale che $\operatorname{Ker}(f^k)=\operatorname{Ker}(f^{k+1})$. Allora $\operatorname{Ker}(f^k)=\operatorname{Ker}(f^h)$ per ogni $h\geq k$.*

Dimostrazione. [1] Se $v \in \mathrm{Ker}(f^h)$, allora $f^{h+1}(v) = f(f^h(v)) = f(0) = 0$ e quindi $v \in \mathrm{Ker}(f^{h+1})$. Se $v \in f^{h+1}(V)$, allora esiste $u \in V$ tale che $v = f^{h+1}(u) = f^h(f(u))$ e quindi $v \in f^h(V)$.

[2] Poiché nucleo ed immagine sono sottospazi vettoriali di dimensione finita si ha

$$\mathrm{Ker}(f^h) = \mathrm{Ker}(f^{h+1}) \quad \text{se e solo se} \quad \dim \mathrm{Ker}(f^h) = \dim \mathrm{Ker}(f^{h+1}),$$

$$f^{h+1}(V) = f^h(V) \quad \text{se e solo se} \quad \dim f^{h+1}(V) = \dim f^h(V).$$

È adesso sufficiente applicare la formula delle dimensioni di nucleo ed immagine

$$\dim \mathrm{Ker}(f^h) + \dim f^h(V) = \dim \mathrm{Ker}(f^{h+1}) + \dim f^{h+1}(V) = \dim V.$$

[3] Consideriamo la restrizione di f al sottospazio $f^h(V)$:

$$f_{|f^h(V)} \colon f^h(V) \to V.$$

L'immagine di tale applicazione è il sottospazio $f(f^h(V)) = f^{h+1}(V)$, mentre il nucleo è uguale a $\mathrm{Ker}(f) \cap f^h(V)$. Per la formula delle dimensioni di nucleo ed immagine si ha $\alpha_h = \dim(\mathrm{Ker}(f) \cap f^h(V))$ e siccome $f^{h+1}(V) \subseteq f^h(V)$ si ha

$$\mathrm{Ker}(f) \cap f^{h+1}(V) \subseteq \mathrm{Ker}(f) \cap f^h(V)$$

e dunque $\alpha_{h+1} \leq \alpha_h$.

[4] Dato che $\alpha_0 + \cdots + \alpha_h = \dim V - \dim f_{h+1}(V) \leq \dim V$ deve esistere un $k \leq n$ tale che $\alpha_k = 0$. Per il punto precedente $\alpha_h = 0$ per ogni $h \geq k$ e quindi $\dim f_h(V) = \dim f_k(V)$ per ogni $h \geq k$. □

Definizione 1.6. Il **radicale** di un endomorfismo $f \colon V \to V$ è il sottospazio vettoriale

$$\mathrm{Rad}(f) = \{v \in V \mid f^h(v) = 0 \text{ per qualche } h > 0\} = \bigcup_{h>0} \mathrm{Ker}(f^h).$$

Abbiamo visto che i nuclei delle potenze di f si stabilizzano e quindi esiste un intero $k \leq \dim V$, dipendente da f, tale che $\mathrm{Rad}(f) = \mathrm{Ker}(f^k)$.

Definizione 1.7. Un endomorfismo $f : V \to V$ si dice **nilpotente** se $f^m = 0$, per qualche $m \geq 1$. Il più piccolo intero positivo s tale che $f^s = 0$ viene detto **indice di nilpotenza**.

Esempio 1.8. Sia A una matrice triangolare con tutti zeri sulla diagonale. Allora A è nilpotente (vedi Esercizio 1.1).

In base alle osservazioni precedenti possiamo affermare che f è nilpotente se e solo se $Rad(f) = V$ e che l'indice di nilpotenza è sempre minore od uguale alla dimensione di V. Per l'Esempio 1.3 il radicale di f è un sottospazio f-invariante e la restrizione

$$f \colon \mathrm{Rad}(f) \to \mathrm{Rad}(f)$$

è nilpotente.

Teorema 1.9. *Sia $f \colon V \to V$ un endomorfismo e sia $k \geq 1$ un intero che stabilizza la filtrazione dei nuclei, ossia tale che $\mathrm{Rad}(F) = \mathrm{Ker}(f^k)$. Denotiamo con $U = \mathrm{Rad}(f) = \mathrm{Ker}(F^k)$ e $W = f^k(V)$. Allora:*

(1) *$f(U) \subseteq U$, $f(W) \subseteq W$.*
(2) *$f_{|W} \colon W \to W$ è un isomorfismo.*
(3) *$f_{|U} \colon U \to U$ è nilpotente.*
(4) *$U \cap W = 0$ e $V = U \oplus W$.*

Dimostrazione. Il primo punto è dimostrato nell'Esempio 1.3. Essendo l'applicazione $f \colon f^k(V) \to f^{k+1}(V)$ surgettiva e $f^k(V) = f^{k+1}(V) = W$, si ha che $f_{|W} \colon W \to W$ è surgettiva e quindi anche un isomorfismo. Per costruzione $f^k(U) = 0$ e quindi $f_{|U}$ è nilpotente. Sia $v \in U \cap W$, allora $f^k(v) = 0$ poiché $v \in U$. D'altronde $f^k \colon W \to W$ è invertibile e questo implica $v = 0$. Dalla formula di Grassmann segue che $\dim(U + W) = \dim V$ e quindi $V = U \oplus W$. □

Lemma 1.10. *Sia $f\colon V \to V$ un endomorfismo nilpotente. Allora esiste una base di V rispetto alla quale f si rappresenta con una matrice triangolare strettamente superiore (triangolare superiore con diagonale principale nulla).*

Dimostrazione. Dimostriamo il teorema per induzione su $n = \dim V$, essendo banalmente vero per $n = 1$. Dato che f non è invertibile si ha $\dim f(V) < n$, la restrizione $f\colon f(V) \to f(V)$ è nilpotente e per l'ipotesi induttiva possiamo trovare una base $v_1, \dots, v_r$ di $f(V)$ rispetto alla quale la restrizione di f a $f(V)$ si rappresenta con una matrice A triangolare strettamente superiore. Estendiamo $v_1, \dots, v_r$ ad una base $v_1, \dots, v_n$ di V; siccome $f(v_i) \in f(V)$ per ogni i, la matrice che rappresenta f nella base $v_1, \dots, v_n$ è una matrice a blocchi

$$\begin{pmatrix} A & * \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

che risulta essere quindi triangolare strettamente superiore. □

Corollario 1.11 (Teoremino di struttura per gli endomorfismi)**.** *Siano V uno spazio vettoriale di dimensione n, $f\colon V \to V$ un endomorfismo e $r = \dim \operatorname{Rad}(f)$. Allora esiste una base di V rispetto alla quale f si rappresenta con una matrice diagonale a blocchi*

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$$

con A matrice $r \times r$ triangolare strettamente superiore e B matrice $(n-r) \times (n-r)$ invertibile.

Dimostrazione. Nelle notazioni del Teorema 1.9 è sufficiente prendere una base $v_1, \dots, v_n$ tale che $v_{r+1}, \dots, v_n \in W$ e $v_1, \dots, v_r$ è una base di U rispetto alla quale l'endomorfismo nilpotente $f_{|U}$ si rappresenta con una matrice triangolare strettamente superiore. □

Esercizi.

1.1. Sia $A = (a_{ij})$ una matrice $n \times n$ e sia k un intero tale che $0 \leq k < n$ e $a_{ij} = 0$ ogniqualvolta $j - i \leq k$. Dimostrare che $A^{n-k} = 0$.

1.2. Sia $f\colon V \to V$ un endomorfismo. Mostrare con un esempio che in generale $V \neq \operatorname{Ker}(f) \oplus f(V)$.

1.3. Sia $f\colon V \to V$ nilpotente. Dimostrare che $I - f$ è invertibile (sugg.: se non si vuole utilizzare il Lemma 1.10 pensare a cosa è uguale $(I - f)(I + f + f^2 + \cdots + f^n)$).

1.4. Sia $f\colon V \to V$ nilpotente. Dimostrare che $I + f + f^2$ è invertibile.

1.5. Sia $f\colon V \to V$ nilpotente. Dimostrare che per ogni $a, b \in V$ esistono due vettori $x, y \in V$ tali che

$$f(x) + x + y = a, \quad f(y) + y - x = b.$$

1.6. Sia $f\colon V \to V$ endomorfismo nilpotente con indice di nilpotenza σ e sia $v \in V$ un vettore tale che $f^{\sigma-1}(v) \neq 0$. Dimostrare che il sottospazio

$$U = L(v, f(v), \dots, f^{\sigma-1}(v))$$

è f-invariante di dimensione σ. Calcolare inoltre le dimensioni di $U \cap \operatorname{Ker}(f^i)$ e $U \cap f^i(V)$ per ogni intero $i \geq 0$.

1.7. Sia $f\colon V \to V$ endomorfismo nilpotente con indice di nilpotenza σ. Provare che

$$\frac{\dim V}{\dim \operatorname{Ker}(f)} \leq \sigma \leq \dim V$$

e che vale $\sigma = \dim V$ se e solo se esiste una base in cui f si rappresenta con la matrice

$$A = (a_{ij}), \qquad a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j + 1, \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

2. Determinante, traccia e polinomio caratteristico

Sia $f\colon V\to V$ un endomorfismo; fissata una base $v_1,\ldots,v_n$ di V possiamo rappresentare f con la matrice A tale che

$$(f(v_1),\ldots,f(v_n))=(v_1,\ldots,v_n)A.$$

Se $w_1,\ldots,w_n$ è un'altra base e se scriviamo

$$(w_1,\ldots,w_n)=(v_1,\ldots,v_n)C$$

con C matrice invertibile $n\times n$, allora si ha

$$(v_1,\ldots,v_n)=(w_1,\ldots,w_n)C^{-1},$$

$$(f(w_1),\ldots,f(w_n))=(f(v_1),\ldots,f(v_n))C=(v_1,\ldots,v_n)AC=(w_1,\ldots,w_n)C^{-1}AC.$$

Dunque cambiando base, la matrice che rappresenta f si trasforma in una sua coniugata. Dunque

qualunque attributo delle matrici quadrate che sia invariante per coniugio definisce un attributo degli endomorfismi.

Ad esempio, possiamo definire il determinante $\det(f)$ di un endomorfismo $f\colon V\to V$ tramite la formula $\det(f)=|A|$, dove A è la matrice che rappresenta f in una qualunque base. Siccome il determinante è invariante per coniugio, il determinante di A non dipende dalla scelta della base.

Similmente si definiscono la traccia $\mathrm{Tr}(f)$ ed il polinomio caratteristico $p_f(t)$ di un endomorfismo $f\colon V\to V$ tramite le formule $\mathrm{Tr}(f)=\mathrm{Tr}(A)$ e $p_f(t)=p_A(t)=|A-tI|$, dove A è la matrice che rappresenta f in una qualunque base.

Esempio 2.1. Sia $f\colon V\to V$ nilpotente, allora $p_f(t)=(-t)^{\dim V}$. Infatti in una base opportuna f si rappresenta con una matrice triangolare streattamente superiore.

Lemma 2.2. *Sia r la dimensione del radicale di un endomorfismo $f\colon V\to V$. Allora vale $p_f(t)=t^rq(t)$, dove $q(t)$ è un polinomio tale che $q(0)\neq 0$.*

Dimostrazione. Per il teoremino di struttura, in una opportuna base di V l'applicazione f è rappresentata da una matrice a blocchi

$$\begin{pmatrix} A & 0\\ 0 & B\end{pmatrix}$$

con A matrice $r\times r$ triangolare strettamente superiore e B matrice $(n-r)\times(n-r)$ invertibile. Dunque $p_f(t)=p_A(t)p_B(t)=(-t)^rp_B(t)$. Siccome B è invertibile si ha $p_B(0)=\det(B)\neq 0$. □

Esempio 2.3. Sia $v_0,\ldots,v_{n-1}$ una base di uno spazio vettoriale V e consideriamo l'endomorfismo $f\colon V\to V$ definito dalle relazioni

$$f(v_i)=v_{i+1}\qquad 0\le i<n-1,$$

$$f(v_{n-1})=a_1v_{n-1}+\cdots+a_{n-1}v_1+a_nv_0,$$

dove $a_1,\ldots,a_n\in\mathbb{K}$ sono numeri qualunque. Tale endomorfismo è rappresentato dalla matrice (detta di Frobenius)

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_n\\ 1 & 0 & \cdots & 0 & a_{n-1}\\ 0 & 1 & \cdots & 0 & a_{n-2}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 1 & a_1\end{pmatrix}$$

Dimostriamo per induzione su n che il suo polinomio caratteristico è uguale a

$$p_f(t)=p_A(t)=(-1)^n(t^n-a_1t^{n-1}-\cdots-a_{n-1}t-a_n).$$

Si ha

$$p_A(t) = \begin{vmatrix} -t & 0 & \cdots & 0 & a_n \\ 1 & -t & \cdots & 0 & a_{n-1} \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & a_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & a_1 - t \end{vmatrix}$$

Dallo sviluppo di Laplace rispetto alla prima riga si ottiene

$$p_A(t) = (-t) \begin{vmatrix} -t & 0 & \cdots & 0 & a_{n-1} \\ 1 & -t & \cdots & 0 & a_{n-2} \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & a_{n-3} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & a_1 - t \end{vmatrix} + (-1)^{n+1} a_n \begin{vmatrix} 1 & -t & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & -t & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$$

e per l'ipotesi induttiva

$$p_A(t) = (-t)(-1)^{n-1}(t^{n-1} - a_1 t^{n-2} - \cdots - a_{n-1}) - (-1)^n a_n.$$

Proposizione 2.4. *Siano $f\colon V \to V$ un endomorfismo e $U \subset V$ un sottospazio f-invariante, ossia tale che $f(U) \subseteq U$. Si consideri l'applicazione lineare $f_{|U}\colon U \to U$ ottenuta restringendo f al sottospazio U. Allora il polinomio caratteristico di $f_{|U}$ divide il polinomio caratteristico di f:*

$$p_f(t) = p_{f_{|U}}(t) q(t)\,.$$

Dimostrazione. Sia $u_1, \dots, u_m$ una base di U e la si completi a una base $u_1, \dots, u_m, v_1, \dots, v_h$ di V. Poiché $f(U) \subseteq U$, la matrice di f in questa base è del tipo

$$A = \begin{pmatrix} B & C \\ 0 & D \end{pmatrix} \tag{2.1}$$

dove B è la matrice di $f_{|U}$ nella base $u_1, \dots, u_m$. Dunque:

$$p_f(t) = \det(A - tI) = \det(B - tI)\det(D - tI) = p_{f_{|U}}(t)\det(D - tI)\,.$$

□

Esercizi.

2.1. Sia $V \subset \mathbb{K}^4$ il sottospazio di equazione $x + y - z - t = 0$ e sia $f\colon \mathbb{K}^4 \to \mathbb{K}^4$ l'applicazione lineare tale che $f(x, y, z, t) = (x + x, y + x, z + x, t + x)$. Dimostrare che $f(V) \subset V$ e calcolare il polinomio caratteristico della restrizione $f_{|V}\colon V \to V$.

2.2. Siano $f\colon V \to V$ un endomorfismo ed $U \subset V$ un sottospazio vettoriale tale che $f(V) \subset U$. Dimostrare che U è un sottospazio f-invariante e che la traccia di f è uguale alla traccia della restrizione $f_{|U}\colon U \to U$.

2.3. Mostrare che ogni polinomio di grado n è un multiplo scalare del polinomio caratteristico di una matrice $n \times n$.

3. Il teorema di Cayley-Hamilton

Per un endomorfismo $f\colon V\to V$ ha senso considerare le combinazioni lineari delle potenze di f, ossia gli endomorfismi della forma

$$a_0f^k+a_1f^{k-1}+a_2f^{k-2}+\cdots+a_{k-1}f+a_kI\colon V\to V\ .$$

Dunque, dato un qualsiasi polinomio

$$p(t)\in\mathbb{K}[t],\qquad p(t)=a_0+a_1t+\cdots+a_nt^n,$$

ha senso considerare l'endomorfismo

$$p(f)\colon V\to V,\qquad p(f)=a_0I+a_1f+\cdots+a_nf^n.$$

È importante osservare che l'applicazione

$$\mathbb{K}[t]\to\mathcal{L}(V,V),\qquad p(t)\mapsto p(f),$$

commuta con le operazioni di somma e prodotto. Cioè, per ogni coppia di polinomi $p,q\in\mathbb{K}[t]$ vale

$$(p+q)(f)=p(f)+q(f),\qquad pq(f)=p(f)q(f).$$

Teorema 3.1 (Cayley-Hamilton)**.** *Sia $f\colon V\to V$ un endomorfismo. Allora*

$$p_f(f)=0\,.$$

Dimostrazione. Dobbiamo dimostrare che per ogni vettore $v\in V$ vale $p_f(f)(v)=0$; non è restrittivo supporre $v\neq 0$. Indichiamo con $k>0$ il più grande intero tale che i k vettori $v,f(v),\dots,f^{k-1}(v)$ siano linearmente indipendenti. Dunque il vettore $f^k(v)$ appartiene alla chiusura lineare di $v,\dots,f^{k-1}(v)$, ossia esistono $a_1,\dots,a_k\in\mathbb{K}$ tali che

$$f^k(v)=a_1f^{k-1}(v)+a_2f^{k-2}(v)+\cdots+a_{k-1}f(v)+a_kv\ .$$

Sia $v_1,\dots,v_n$ una base di V tale che

$$v_1=v,\quad v_2=f(v),\quad \dots,v_k=f^{k-1}(v)\,.$$

Allora vale $f(v_i)=v_{i+1}$ per $i<k$ e

$$f(v_k)=a_1v_k+a_2v_{k-1}+\cdots+a_{k-1}v_2+a_kv_1\ .$$

La matrice di f in questa base è del tipo

$$\begin{pmatrix}A&C\\0&B\end{pmatrix}$$

dove A è la matrice di Frobenius

$$A=\begin{pmatrix}0&0&\cdots&0&a_k\\1&0&\cdots&0&a_{k-1}\\0&1&\cdots&0&a_{k-2}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots\\0&0&\cdots&1&a_1\end{pmatrix}$$

Dunque

$$p_f(t)=p_B(t)p_A(t)=\pm p_B(t)(t^k-a_1t^{k-1}-\cdots-a_k)$$
$$p_f(f)(v)=\pm p_B(f)(f^k(v)-a_1f^{k-1}(v)-\cdots-a_kv)=\pm p_B(f)(0)=0.$$

□

Lemma 3.2. *Sia $B\in M_{n,n}(\mathbb{K})$ una matrice invertibile. Allora esiste un esponente i con $1\leq i\leq n$ tale che $\mathrm{Tr}(B^i)\neq 0$.*

Dimostrazione. Per Cayley-Hamilton si ha

$$0 = p_B(B) = \det(B)I + a_1 B + \cdots + a_n B^n$$

per opportuni coefficienti $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{K}$. Quindi

$$\det(B)I = -a_1 B - \cdots - a_n B^n$$

e per la linearità della traccia

$$0 \neq \det(B)\operatorname{Tr}(I) = -a_1 \operatorname{Tr}(B) - \cdots - a_n \operatorname{Tr}(B^n).$$

□

Corollario 3.3. *Sia f un endomorfismo di uno spazio vettoriale V di dimensione n. Allora le seguenti condizioni sono equivalenti:*

(1) *f è nilpotente;*
(2) *in una base opportuna f si rappresenta con una matrice triangolare strettamente superiore;*
(3) *$p_f(t) = \pm t^n$;*
(4) *$\operatorname{Tr}(f) = \operatorname{Tr}(f^2) = \cdots = \operatorname{Tr}(f^n) = 0$.*

Dimostrazione. Abbiamo già dimostrato che (1) implica (2) e che (2) implica (3). Se $p_f(t) = \pm t^n$ allora per Cayley-Hamilton $p_f(f) = \pm f^n = 0$ e quindi f è nilpotente; abbiamo quindi dimostrato l'equivalenza di (1), (2) e (3).

Per (2) ogni nilpotente ha traccia nulla, siccome f nilpotente implica f^i nilpotente per ogni $i > 0$, si ha che le prime tre condizioni implicano la quarta.

Sia infine f un endomorfismo tale che $\operatorname{Tr}(f) = \operatorname{Tr}(f^2) = \cdots = \operatorname{Tr}(f^n) = 0$; per il teoremino di struttura possiamo rappresentare f con una matrice diagonale a blocchi

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$$

con A nilpotente e B invertibile. Dunque f^k è rappresentata dalla matrice

$$\begin{pmatrix} A^k & 0 \\ 0 & B^k \end{pmatrix}.$$

Dunque $\operatorname{Tr}(B^k) = \operatorname{Tr}(f^k) - \operatorname{Tr}(A^k) = 0$ e basta applicare il lemma precedente per dedurre che B deve essere la matrice vuota. □

Esercizi.

3.1. Siano $f, g\colon V \to V$ due endomorfismi che commutano tra loro, ossia tali che $fg = gf$. Dimostrare che:

(1) Per ogni $h \geq 0$ vale $f^h g = g f^h$ (sugg.: induzione su h).
(2) Per ogni $h, k \geq 0$ vale $f^h g^k = g^k f^h$ (sugg.: induzione su k).
(3) Per ogni coppia di polinomi $p, q \in \mathbb{K}[t]$ vale $p(f)q(g) = q(g)p(f)$.

3.2. Trovare una matrice invertibile $B \in M_{n,n}(\mathbb{K})$ tale che $\operatorname{Tr}(B^i) = 0$ per ogni $1 \leq i < n$.

3.3. Si consideri la matrice

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Determinare i valori di $a \in \mathbb{K}$ per cui A è nilpotente.