DETERMINANTI (SECONDA PARTE). NOTE DI ALGEBRA LINEARE 2010-11

MARCO MANETTI: 21 DICEMBRE 2010

1. Sviluppi di Laplace

Proposizione 1.1. *Sia $A \in M_{n,n}(\mathbb{K})$, allora per ogni indice $i = 1, \ldots, n$ fissato vale lo* sviluppo di Laplace rispetto alla riga *i:*

$$|A| = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} |A_{ij}|.$$

Dimostrazione. Per $i = 1$ la formula è vera per definizione. Definiamo per ogni i l'applicazione

$$d_i \colon M_{n,n}(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}, \qquad d_i(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j+1} a_{ij} |A_{ij}|;$$

e dimostriamo per induzione su i che $d_i(A) = (-1)^{i-1}|A|$ per ogni matrice A. Sia τ_i la trasposizione semplice che scambia gli indici $i, i+1$ e sia B la matrice ottenuta da A scambiando tra loro le righe i e $i + 1$. Valgono allora le formule

$$d_{i+1}(A) = d_i(B), \qquad B = I^{\tau_i} A.$$

Per il teorema di Binet e per l'ipotesi induttiva si ha:

$$d_{i+1}(A) = d_i(B) = (-1)^{i-1}|B| = (-1)^{i-1}|I^{\tau_i}||A| = (-1)^{i}|A|.$$

□

Esempio 1.2. Calcoliamo il determinante della matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 6 & 7 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Dallo sviluppo di Laplace rispetto all'ultima riga segue

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 6 & 7 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 7 & 0 \end{vmatrix} = -70.$$

Lemma 1.3 (determinante della trasposta)**.** *Per ogni matrice $A \in M_{n,n}(\mathbb{K})$ vale $|A^T| = |A|$.*

Dimostrazione. Siccome $|I^T| = 1$ basta dimostrare che l'applicazione

$$d \colon M_{n,n}(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}, \qquad d(A) = |A^T|,$$

è multilineare alternante sulle colonne.

Indicati con a_{ij} e coefficienti di A, fissato un indice i, per lo sviluppo di Laplace rispetto alla riga i si ha:

$$d(A) = |A^T| = \sum_{j=1}^{n} a_{ji} (-1)^{i+j} |(A^T)_{ij}|$$

e da tale formula segue immediatamente che $d(A)$ è lineare rispetto alla colonna i. Infine se A ha le colonne $i, i+1$ uguali allora ogni vettore colonna di A^T è contenuto nel sottospazio vettoriele di equazione $x_i - x_{i+1} = 0$; dunque le colonne di A^T sono linearmente dipendenti e quindi $|A^T| = 0$. □

Corollario 1.4. *Sia $A = (a_{ij}) \in M_{n,n}(\mathbb{K})$, allora per ogni indice $i = 1, \dots, n$ fissato vale lo* Sviluppo di Laplace rispetto alla colonna *i:*

$$|A| = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} |A_{ij}|.$$

Dimostrazione. Prendendo lo sviluppo di Laplace rispetto alla riga i della matrice trasposta si ha

$$|A^T| = \sum_{j=1}^{n} a_{ji} (-1)^{i+j} |A^T_{ij}|.$$

Siccome $(A^T)_{ij} = (A_{ji})^T$ ed il determinante di una matrice è uguale al determinante della propria trasposta si ha

$$|A| = |A^T| = \sum_{j=1}^{n} a_{ji} (-1)^{i+j} |(A^T)_{ij}| = \sum_{j=1}^{n} a_{ji} (-1)^{i+j} |A_{ji}|.$$

□

Dal fatto che il detreminante di una matrice è uguale al determinante della trasposta, segue che il determinante è multilineare alternante sulle righe. In particolare:

(1) Scambiando due righe il determinante cambia di segno.
(2) Moltiplicando una riga per uno scalare λ, anche il determinante viene moltiplicato per λ.
(3) Aggiungendo ad una riga una combinazione lineare delle altre, il determinante non cambia.
(4) Se le righe sono linearmente dipendenti il determinante si annulla.

Esempio 1.5. Le precedenti regole permettodo di calcolare il determinante con un misto di eliminazione di Gauss e sviluppo di Laplace. Supponiamo ad esempio di voler calcolare il determinante

$$\lambda = \begin{vmatrix} 10 & 20 & 32 \\ 4 & 2 & 25 \\ 3 & 0 & 9 \end{vmatrix}$$

Togliamo alla terza colonna il doppio della prima; il determinante non cambia:

$$\lambda = \begin{vmatrix} 10 & 20 & 12 \\ 4 & 2 & 17 \\ 3 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 20 & 12 \\ 2 & 17 \end{vmatrix} = 3(340 - 24) = 632.$$

Esempio 1.6. Calcoliamo il determinante della matrice di Vandermonde; più precisamente proviamo che

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_0 & x_1 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_0^{n-1} & x_1^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \\ x_0^n & x_1^n & \cdots & x_n^n \end{vmatrix} = \prod_{i>j} (x_i - x_j)$$

Ragioniamo per induzione su n, considerando il polinomio

$$p(t) = \prod_{j=0}^{n-1} (t - x_j) = t^n + \sum_{i=0}^{n-1} a_i t^i.$$

Sommando all'ultima riga della matrice di Vandermonde la combinazione lineare a coefficienti a_i delle rimanenti righe si ottiene

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_0 & x_1 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_0^{n-1} & x_1^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \\ x_0^n & x_1^n & \cdots & x_n^n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_0 & x_1 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_0^{n-1} & x_1^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \\ p(x_0) & p(x_1) & \ldots & p(x_n) \end{vmatrix}$$

Dato che $p(x_i) = 0$ per ogni $i < n$ e $p(x_n) = \prod_{n>j}(x_n - x_j)$ si ha

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_0 & x_1 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_0^{n-1} & x_1^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \\ x_0^n & x_1^n & \cdots & x_n^n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_0 & x_1 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_0^{n-1} & x_1^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \\ 0 & 0 & \cdots & p(x_n) \end{vmatrix} =$$

$$= p(x_n) \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_0 & x_1 & \cdots & x_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_0^{n-1} & x_1^{n-1} & \cdots & x_{n-1}^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{n>j}(x_n - x_j) \prod_{n>i>j}(x_i - x_j).$$

Abbiamo quindi ridimostrato che la matrice di Vandermonde

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_0 & x_1 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_0^{n-1} & x_1^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \\ x_0^n & x_1^n & \cdots & x_n^n \end{pmatrix} \tag{1.1}$$

è **invertibile se e soltanto se** $x_i \neq x_j$ **per ogni** $i \neq j$.

Esercizi.

1.1. Provare che il determinante di una matrice triangolare è uguale al prodotto degli elementi della diagonale.

1.2. Dati due interi positivi n, p si consideri la matrice $A = (a_{ij})$, dove

$$a_{ij} = (ni + j)p + 1, \qquad i, j = 1, \ldots, n.$$

Per quali valori di n, p il determinante di A è uguale a -1250?

1.3. Dimostrare che il determinante di una matrice antisimmetrica di ordine 351 si annulla.

1.4. Dimostrare, usando l'eliminazione di Gauss, che il determinante della matrice

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 & 2 & 8 & 6 & 6 \\ 1 & -1 & -1 & 3 & 0 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & -1 & 3 & 5 & 7 & -1 \\ 2 & 1 & 6 & 0 & 3 & -8 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & -2 & 7 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 7 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 2 & 7 & 3 \end{pmatrix}$$

è uguale a 0.

1.5. Siano $A \in M_{n,n}(\mathbb{K})$, $B \in M_{m,m}(\mathbb{K})$ e $C \in M_{n,m}(\mathbb{K})$. Utilizzare lo sviluppo di Laplace e le proprietà del determinante per dimostrare che

$$\begin{vmatrix} A & C \\ 0 & B \end{vmatrix} = |A||B|, \qquad \begin{vmatrix} 0 & B \\ A & C \end{vmatrix} = (-1)^{nm}|A||B|.$$

1.6. Sia A una matrice 10×10 Calcolare, in funzione di $|A|$, il determinante della seguente matrice 20×20

$$\begin{pmatrix} 6A & 5A \\ A & 2A \end{pmatrix}$$

1.7. Indichiamo con d_k, $k \geq 1$, il determinante della matrice $k \times k$

$$\begin{pmatrix} 6 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 6 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 6 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 6 & 1 & \dots & \\ & & & \dots & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 6 \end{pmatrix}$$

($d_1 = 6$, $d_2 = 35$ eccetera). Dimostrare che per ogni $k \geq 3$ vale $d_k = 6d_{k-1} - d_{k-2}$.
Siano x, y le radici del polinomio $t^2 - 6t + 1$. Dimostrare che per ogni $k \geq 3$ vale

$$x^k = 6x^{k-1} - x^{k-2}, \qquad y^k = 6y^{k-1} - y^{k-2}.$$

Determinare due numeri reali a, b tali che

$$d_k = ax^k + by^k$$

per ogni $k \geq 1$.

2. La matrice dei cofattori

Definizione 2.1. Data una matrice quadrata $A \in M_{n,n}(\mathbb{K})$ la **matrice dei cofattori**[1] $\widetilde{A}$ è definita mediante la formula:

$$\widetilde{A} = (\tilde{a}_{ij}), \qquad \tilde{a}_{ij} = (-1)^{i+j}|A_{ji}|.$$

Esempio 2.2. La matrice dei cofattori di $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ è uguale a $\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$.

Teorema 2.3. *Per ogni matrice quadrata A vale*

$$A\widetilde{A} = \widetilde{A}A = |A|I.$$

Dimostrazione. Se $A = (a_{ij})$, tenendo presente la definizione di $\widetilde{A}$ e del prodotto di matrici, la formula $A\widetilde{A} = |A|I$ equivale alle relazioni

$$\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+j}a_{ik}|A_{jk}| = \begin{cases} |A| & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases} \tag{2.1}$$

Per $i = j$ la formula (2.1) coincide con lo sviluppo di Laplace rispetto alla riga i. Se invece $i \neq j$ indichiamo con B la matrice ottenuta da A in cui la riga j è sostituita con la riga i; la matrice B ha dunque due righe uguali e vale $a_{ik} = b_{ik} = b_{jk}$, $A_{jk} = B_{jk}$ per ogni k. Ne segue che

$$0 = |B| = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+j}b_{jk}|B_{jk}| = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+j}a_{ik}|A_{jk}|.$$

La formula $\widetilde{A}A = |A|I$ si dimostra allo stesso modo utilizzando gli sviluppi di Laplace rispetto alle colonne. □

[1] In alcuni testi la matrice dei cofattori viene chiamata matrice aggiunta.

Corollario 2.4. *Una matrice quadrata A è invertibile se e solo se $|A| \neq 0$; in tal caso l'inversa è uguale a $A^{-1} = \dfrac{\widetilde{A}}{|A|}$ ed il suo determinante è uguale a $|A^{-1}| = |A|^{-1}$.*

Dimostrazione. Se A è invertibile allora $AA^{-1} = I$ e per il teorema di Binet $|A||A^{-1}| = |I| = 1$ da cui segue $|A| \neq 0$. Viceversa se $|A| \neq 0$ segue dal Teorema 2.3 che A è invertibile con inversa $\dfrac{\widetilde{A}}{|A|}$. □

Corollario 2.5. *Il rango di una matrice A è uguale al più grande intero r per cui A contiene una sottomatrice quadrata di ordine r con determinante diverso da* 0.

Dimostrazione. Abbiamo già dimostrato che il rango di una matrice A è uguale al più grande intero r per cui A contiene una sottomatrice quadrata e invertibile di ordine r. □

Esercizi.

2.1. Calcolare le inverse delle seguenti matrici

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

2.2. Vero o falso? Ogni matrice 2×4 nella quale i determinanti dei minori 2×2 formati da due colonne adiacenti si annullano ha rango minore di 2.

2.3. Sia $A \in M_{n,n}(\mathbb{K})$. Provare che il rango della matrice dei cofattori $\widetilde{A}$ è uguale a: n se A è invertibile, 1 se il rango di A è uguale a $n-1$, 0 se il rango di A è minore di $n-1$.

2.4. Provare che $|\widetilde{A}| = |A|^{n-1}$ e $(\widetilde{A})^T = \widetilde{(A^T)}$.

3. Matrici coniugate

Definizione 3.1. Il **gruppo lineare** $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ è l'insieme delle matrici $A \in M_{n,n}(\mathbb{K})$ che sono invertibili.

Abbiamo visto che se $A, B \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ allora anche $A^{-1}, A^T, AB \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$. Si noti che $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ non è un sottospaio vettoriale.

Definizione 3.2. Date due matrici $A, B \in M_{n,n}(\mathbb{K})$ diremo che A è **coniugata** a B, e scriveremo $A \sim B$, se esiste $C \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ tale che $A = CBC^{-1}$.

La relazione di coniugio gode delle seguenti proprietà:

: Proprietà riflessiva $A \sim A$ per ogni $A \in M_{n,n}(\mathbb{K})$.
: Proprietà simmetrica Se $A \sim B$ allora $B \sim A$.
: Proprietà transitiva Se $A \sim B$ e $B \sim H$, allora $A \sim H$.

La verifica di tali proprietà è immediata: infatti $A = IAI^{-1}$; se $A = CBC^{-1}$ allora $B = C^{-1}A(C^{-1})^{-1}$; se $A = CBC^{-1}$ e $B = DHD^{-1}$ allora $A = (CD)H(CD)^{-1}$.

Teorema 3.3. *Due matrici coniugate hanno la stessa traccia e lo stesso determinante.*

Dimostrazione. Esercizio. □

Se $A \sim B$, allora $A^h \sim B^h$ per ogni $h > 0$. Infatti se $A = CBC^{-1}$ si ha
$$A^2 = (CBC^{-1})(CBC^{-1}) = CB^2C^{-1}$$
e per induzione su h
$$A^{h+1} = AA^h = (CBC^{-1})(CB^hC^{-1}) = CB^{h+1}C^{-1}.$$
Ne segue che se $A \sim B$ allora la traccia di A^h è uguale alla traccia di B^h per ogni $h > 0$.

Esempio 3.4. Le due matrici diagonali

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} b & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix},$$

sono coniugate: infatti $A = CBC^{-1}$ dove

$$C = A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Più in generale due matrici diagonali ottenute l'una dall'altra mediate una permutazione degli elementi sulla diagonale sono coniugate.

Esercizi.

3.1. Mostrare che le matrici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

non sono coniugate pur avendo lo stesso determinante e pur avendo A^h e B^h la stessa traccia per ogni $h > 0$.

3.2. Calcolare

$$\begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e dedurre che per ogni $a \in \mathbb{K}$, $a \neq 0$, le matrici

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

sono coniugate.

3.3. Mostrare che per ogni $a \in \mathbb{K}$, $a \neq 0$, le matrici

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

sono coniugate.

4. Indipendenza del coniugio dal campo base

Come al solito indichiamo con $\mathbb{K}$ un sottocampo di $\mathbb{C}$.

Lemma 4.1. *Siano $A, B \in M_{n,n}(\mathbb{K})$ e $C \in M_{n,n}(\mathbb{C})$ tre matrici. Si assuma che esista un numero complesso $\alpha \in \mathbb{C}$ tale che la matrice*

$$A + \alpha B + C$$

è invertibile. Allora esiste $\beta \in \mathbb{K}$ tale che la matrice

$$A + \beta B + C$$

è ancora invertibile.

Dimostrazione. Sia t una indeterminata e si condideri il polinomio

$$p(t) = |A + tB + C| \in \mathbb{C}[t].$$

Il polinomio $p(t)$ ha grado $\leq n$ e non è nullo poiché $p(\alpha) \neq 0$. Dunque p possiede un numero finito di radici e basta prendere $\beta \in \mathbb{K}$ una non radice di p. $\square$

Lemma 4.2. *Siano $\alpha_1, \ldots, \alpha_r \in \mathbb{C}$ linearmente indipendenti su $\mathbb{K}$ e siano $A_1, \ldots, A_r \in M_{n,n}(\mathbb{K})$ tali che*

$$\alpha_1 A_1 + \cdots + \alpha_r A_r = 0.$$

Allora $A_1 = \cdots = A_r = 0$.

Dimostrazione. Basta osservare che ogni coefficiente della matrice $\alpha_1 A_1 + \cdots + \alpha_r A_r$ è una combinazione lineare su $\mathbb{K}$ dei numeri $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$. □

Teorema 4.3. *Siano $A, B \in M_{n,n}(\mathbb{K})$. Se esiste una matrice $C \in M_{n,n}(\mathbb{C})$ invertibile tale che $AC = CB$, allora esiste una matrice $D \in M_{n,n}(\mathbb{K})$ invertibile tale che $AD = DB$.*

Dimostrazione. Consideriamo $\mathbb{C}$ come spazio vettoriale su $\mathbb{K}$ e sia $V \subset \mathbb{C}$ il sottospazio vettoriale generato dai coefficienti di C; chiaramente V ha dimensione finita e minore od uguale a n^2. Sia $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ una base di V, allora possiamo scrivere

$$C = \alpha_1 C_1 + \cdots + \alpha_r C_r$$

con $C_i \in M_{n,n}(\mathbb{K})$ per ogni i. Dunque

$$0 = AC - CB = \alpha_1(AC_1 - C_1 B) + \cdots + \alpha_r(AC_r - C_r B)$$

e quindi $AC_i = C_i B$ per ogni i. Se C_i è invertibile per qualche i abbiamo finito. Altrimenti possiamo usare ripetutamente il Lemma 4.1 per dimostrare induttivamente che esistono $\beta_1, \ldots, \beta_r \in \mathbb{K}$ tali che per ogni i la matrice

$$\beta_1 C_1 + \cdots + \beta_i C_i + \alpha_{i+1} C_{i+1} + \cdots + \alpha_r C_r$$

è invertibile. Alla fine possiamo prendere

$$D = \beta_1 C_1 + \cdots + \beta_r C_r\ .$$

□

Corollario 4.4. *Due matrici $A, B \in M_{n,n}(\mathbb{K})$ sono coniugate in $M_{n,n}(\mathbb{K})$ se e solo se sono coniugate in $M_{n,n}(\mathbb{C})$.*

Dimostrazione. Ovvia conseguenza del teorema precedente. □