Teorema 1

$\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$ categorie abeliane. $F: \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ $G: \mathcal{B} \to \mathcal{C}$ funtori additivi esatti a sinistra. $R_{\mathcal{A}} \subseteq Ob\,\mathcal{A}$ e $R_{\mathcal{B}} \subseteq Ob\,\mathcal{B}$ classi adatte rispettive, con la condizione che $F(R_{\mathcal{A}}) \subseteq R_{\mathcal{B}}$.
Allora esistono i funtori derivati $RF, RG, R(G\circ F)$ e il morfismo naturale di funtori $R(G\circ F) \to RG\circ RF$ è un isomorfismo.

dim:

Dalle ipotesi chiaramente $R_{\mathcal{A}}$ è adatta per $G\circ F$. L'esistenza della classe adatta è sufficiente alla costruzione di $R(G\circ F)$.
Il morfismo $R(G\circ F) \to RG\circ RF$ è dato dalla proprietà universale di $R(G\circ F)$:

$$\begin{tikzcd}
 & D^+(\mathcal{A}) \arrow[r, "RF"] \arrow[rrr, bend left, "RG\circ RF"] & D^+(\mathcal{B}) \arrow[rr, "RG"] & & D^+(\mathcal{C}) \\
K^+(\mathcal{A}) \arrow[ur, "Q_{\mathcal{A}}"] \arrow[rr, phantom, "\Uparrow \varepsilon_F"] \arrow[dr, "K^+(F)"'] \arrow[drr, bend right, "K^+(G\circ F)"'] & & & \arrow[r, phantom, "\Uparrow \varepsilon_G"] & \\
 & K^+(\mathcal{B}) \arrow[uur, "Q_{\mathcal{B}}"] \arrow[r, "K^+(G)"'] & K^+(\mathcal{C}) \arrow[uurr, "Q_{\mathcal{C}}"'] & &
\end{tikzcd}$$

Dal diagramma e poiché $K^+(G)\circ K^+(F) = K^+(G\circ F)$ ho un morfismo di funtori

$$\varepsilon: Q_{\mathcal{C}}\circ K^+(G\circ F) \longrightarrow (RG\circ RF)\circ Q_{\mathcal{A}}$$

Quindi ho $\eta: R(G\circ F) \longrightarrow RG\circ RF$.
Siccome per $K^\bullet \in Ob\,Kom^+(R_{\mathcal{A}})$ i due funtori si comportano allo stesso modo, $\eta|_{Ob\,Kom^+(R_{\mathcal{A}})} = id: R(G\circ F)(K^\bullet) \to (RG\circ RF)(K^\bullet)$. Ma ogni oggetto in $D^+(\mathcal{A})$ è isomorfo a un oggetto di $Kom^+(R_{\mathcal{A}})$, e quindi l'isomorfismo di funtori è provato $\square$

Def: SUCCESSIONE SPETTRALE

$\mathcal{A}$ categoria abeliana. Una successione spettrale è una famiglia di oggetti di $\mathcal{A}$ della forma $E = (E_r^{p,q}, E^n)$ $p,q \in \mathbb{Z}$, $r \in \mathbb{N}$ $p+q = n$
con le seguenti proprietà: (r: indice di pagina)

(i) Sul foglio r-esimo esistono differenziali
$d_r^{p,q}: E_r^{p,q} \longrightarrow E_r^{p+r,\, q-r+1}$ tali che $d_r^2 = 0$, o meglio
$d_r^{p+r,\, q-r+1} \circ d_r^{p,q} = 0 \quad \forall p,q,r.$

(ii) detto $H^{p,q}(E_r) := \ker d_r^{p,q} / \operatorname{Im} d_r^{p-r,\, q+r-1}$

si hanno isomorfismi $H^{p,q}(E_r) \simeq E_{r+1}^{p,q}$ (solitamente l'identità)

(iii) $\forall p,q \ \forall n \ \exists\, r_0(p,q)$ t.c. $\forall r \geq r_0 \quad E_r^{p,q} = E_{r+1}^{p,q} =: E_\infty^{p,q}$

(iv) $\exists$ una filtrazione regolare $\cdots \supseteq F^pE^n \supseteq F^{p+1}E^n \supseteq \cdots$ decrescente su ogni E^n tale che $E_\infty^{p,q} \cong F^pE^{p+q} / F^{p+1}E^{p+q} := Gr_p(E^{p+q})$

(una filtrazione è regolare se $\bigcap_p F^pE^n = \{0\}$ e $\bigcup_p F^pE^n = E^n$. $p \in \mathbb{Z}$.

La successione spettrale è detta convergere a E^n ($E_r^{p,q} \Rightarrow E^n$)

<u>OSS</u>: solitamente si ha a che fare con filtrazioni regolari <u>finite</u> ovvero $\forall n \ \exists\, p_+, p_-$ t.c. $F^pE^n = E^n$ per $p < p_-$ e $F^pE^n = \{0\}$ per $p > p_+$ (spesso $p_- = 0$, d'ora in poi lo sarà).
Se poi $\exists r_0$ t.c. $\forall p,q \quad E_r^{p,q} = E_{r+1}^{p,q} \quad \forall r \geq r_0$ la successione si dice degenere al foglio r_0-esimo.

<u>Def</u>: COMPLESSO FILTRATO
Un complesso filtrato è un oggetto $K^\bullet \in Kom(\mathcal{A})$ insieme a una filtrazione (regolare) in sottocomplessi $F^pK^\bullet$, ovvero $\forall n$ $\{F^pK^n\}_{p\in\mathbb{Z}}$ è una filtrazione di K^n, compatibile col differenziale $d(F^pK^n) \subseteq F^pK^{n+1}$. È indotta una filtrazione su $H^n(K^\bullet)$.

<u>Teorema 2</u>

Sia $K^\bullet \in Kom(Ab)$ un complesso filtrato e $\forall n \ \exists\, p_0$ t.c. $F^pK^n = 0 \ \forall p \geq p_0$. Allora esiste una successione spettrale $E = (E_r^{p,q}, E^n)$ con $E^n = H^n(K^\bullet)$

<u>dim</u>: Per semplicità facciamolo per $\mathcal{A} = Ab$ (gruppi abeliani).
Poniamo $Z_r^{p,q} := \{ x \in F^pK^{p+q} \mid dx \in F^{p+r}K^{p+q+1} \}$

$Z_r^{p,q}$ per definizione contiene sia $Z_{r-1}^{p+1,q-1}$ che $dZ_{r-1}^{p-r+1,\, q+r-2}$

Poniamo $B_r^{p,q} := Z_{r-1}^{p+1,q-1} + dZ_{r-1}^{p-r+1,\, q+r-2}$ e infine

$E_r^{p,q} := Z_r^{p,q} / B_r^{p,q}$

(i) Per proprietà della filtrazione, d manda $Z_r^{p,q}$ in $Z_r^{p+r,q-r+1}$ e $B_r^{p,q}$ in $B_r^{p+r,q-r+1}$ e dunque è indotto $d_r^{p,q} : E_r^{p,q} \longrightarrow E_r^{p+r,q-r+1}$.

Verifichiamo le proprietà della successione spettrale

(ii) Sia $z \in Z_{r+1}^{p,q}$, $dz \in Z_{r-1}^{p+r+1,q-r} \subseteq B_r^{p+r,q-r+1}$. Allora se $\bar{z}$ è la classe in $E_r^{p,q}$ (in quanto $z \in Z_{r+1}^{p,q} \subseteq Z_r^{p,q}$) allora $d_r(\bar{z}) = 0$.

Invece se $z \in B_{r+1}^{p,q}$, $z = z_1 + dz_2$ con $z_1 \in Z_r^{p+1,q-1}$ e $dz_2 \in dZ_r^{p-r,q+r-1}$

Siccome $Z_r^{p+1,q-1} \subseteq Z_{r-1}^{p+1,q-1} \subseteq B_r^{p,q}$ $\quad \bar{z} = \overline{dz_2}$, e $\overline{dz_2} = d_r(\bar{z}_2)$.

Risulta ben definita $Z_{r+1}^{p,q} / B_{r+1}^{p,q} \longrightarrow Z^{p,q}(E_r) / B^{p,q}(E_r)$ che si verifica essere iniettiva e suriettiva.

(iii) Fissiamo n. Per $k >> 0$ si ha $F^k K^n = F^k K^{n+1} = 0$

Per $p+q=n$ questo implica
$$Z_{k+1}^{p,q} = Z(F^p K^{p+q})$$
$$Z_k^{p+1,q-1} = Z(F^{p+1} K^{p+q})$$

Inoltre, $p-k<0$ ci dice $dZ_k^{p-k,q+k-1} = F^p K^{p+q} \cap \operatorname{Im} d = B(F^p K^{p+q})$

Dunque
$$E_{k+1}^{p,q} = Z_{k+1}^{p,q} \Big/ \left(Z_k^{p+1,q-1} + dZ_k^{p-k,q+k-1}\right) = \frac{Z(F^p K^{p+q})}{Z(F^{p+1}K^{p+q}) + B(F^p K^{p+q})} =$$

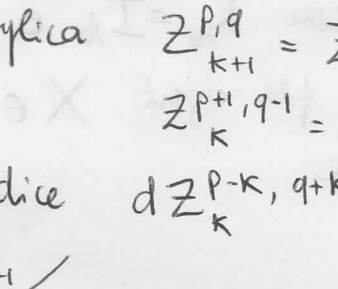
I° th. isomorfismo

$$= F^p H^{p+q}(K^\bullet) \Big/ F^{p+1} H^{p+q}(K^\bullet)$$ □

Def: COMPLESSO DOPPIO

$(L^{p,q}, d, \delta)$

$p,q \in \mathbb{N}$



$\delta : L^{p,q} \longrightarrow L^{p+1,q}$

$d : L^{p,q} \longrightarrow L^{p,q+1}$

$d^2 = \delta^2 = 0$ tutto commutativo

$d\delta + \delta d = 0$

$L_{tot}^n = \bigoplus_{p+q=n} L^{p,q}$ è complesso con $D = d + \delta$

${}'F^p L_{tot}^n = \bigoplus_{i \geq p} L^{i,n-i} \qquad {}''F^q L_{tot}^n = \bigoplus_{j \geq q} L^{n-j,j}$

OSS: Entrambe le filtrazioni sono finite (di lungh. n) e anche l'indotta su $H^n(L^\bullet_{tot})$ lo è.

Applichiamo teorema 2 al complesso totale di un complesso doppio usando entrambe le filtrazioni

$${}'E_0^{p,q} = {}'F^p L^{p+q}_{tot} \big/ {}'F^{p+1} L^{p+q}_{tot} = L^{p,q} \xrightarrow{d_0} {}'E_0^{p,q+1} = L^{p,q+1} \qquad d_0 = d \ !$$

$${}'E_1^{p,q} = H^q_d(L^{p,\bullet}) \xrightarrow{d_1} {}'E_1^{p+1,q} = H^q_d(L^{p+1,\bullet}) \qquad d_1 = \delta$$

$${}'E_2^{p,q} = H^p_\delta H^q_d (L^{\bullet,\bullet})$$

Analogamente $''E_2^{p,q} = H^p_d H^q_\delta (L^{\bullet,\bullet})$.

(*) Esempi (V. PAGINA 9)

—— [QUI TEOREMA ① FOGLIO 1]

Teorema (Grothendieck)

Nelle ipotesi del teorema 1, con $R_{\mathcal{A}} = I_{\mathcal{A}}$ e $R_{\mathcal{B}} = I_{\mathcal{B}}$ classi degli oggetti iniettivi di $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$, per ogni $X \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{A}$ esiste una successione spettrale tale che

(i) $E_2^{p,q} = R^p G(R^q F(X))$

(ii) $E_2^{p,q} \Rightarrow R^{p+q}(G \circ F)(X)$

E tale costruzione è funtoriale in X.

La dimostrazione sarà una semplice applicazione della successione spettrale di un complesso doppio. Bisogna trovare il complesso doppio opportuno.

Lemma (ESISTENZA RISOLUZ. DI CARTAN-EILENBERG)

Sia $K^\bullet \in \mathrm{Kom}(\mathcal{A})$. Esiste allora esiste una risoluzione di $K^\bullet$ detta risoluzione di Cartan-Eilenberg, ovvero un complesso doppio $(L^{p,q})$ tale che:

1) $L^{p,q}$ è un oggetto iniettivo $\forall p,q$.

2) È dato un morfismo di complessi $\varepsilon : K^\circ \to L^{\circ,0}$ che commuta con i differenziali

3) Definiti in modo ovvio $Z^i(L^{\circ,j})$, $B^i(L^{\circ,j})$, $H^i(L^{\circ,j})$ le successioni esatte

$$0 \to B^i(L^{\circ,j}) \to Z^i(L^{\circ,j}) \to H^i(L^{\circ,j}) \to 0$$

$$0 \to Z^i(L^{\circ,j}) \to L^{ij} \to B^{i+1}(L^{\circ,j}) \to 0$$

spezzano. $(\forall\, i,j)$

Ne risulta in particolare che $\forall\, i,j$ B^i, Z^i, H^i sono iniettivi e

$$0 \to B^i(K^\circ) \xrightarrow{\varepsilon} B^i(L^{\circ,0}) \to B^i(L^{\circ,1}) \to \cdots$$

$$0 \to Z^i(K^\circ) \xrightarrow{\varepsilon} Z^i(L^{\circ,0}) \to Z^i(L^{\circ,1}) \to \cdots \qquad (*)$$

$$0 \to H^i(K^\circ) \xrightarrow{\varepsilon} H^i(L^{\circ,0}) \to H^i(L^{\circ,1}) \to \cdots$$

sono risoluzioni iniettive.

4) $(*)$ sono tutti aciclici.

Le risoluzioni di Cartan-Eilenberg sono inoltre funtoriali a meno di omotopia.

L'esistenza della risoluzione di C-E si basa su un semplice risultato

__Prop__: Data $0 \to X' \to X \to X'' \to 0$ esatta, e date $I^\circ_{X'}$, $I^\circ_{X''}$ risolut. iniettive di X' e X'', esiste una risoluzione iniettiva di X I°_X tale che $0 \to I^\circ_{X'} \to I^\circ_X \to I^\circ_{X''} \to 0$ è esatta.
Tale costruzione è inoltre funtoriale a meno di omotopia

__dim__:

$$\begin{tikzcd} & 0 \arrow[d] & & 0 \arrow[d] & \\ 0 \arrow[r] & X' \arrow[r] \arrow[d] & X \arrow[r] & X'' \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\ & I^0_{X'} & & I^0_{X''} & \end{tikzcd}$$

si verifica che ponendo $I^0_X := I^0_{X'} \oplus I^0_{X''}$ il primo diagramma commuta.

Si procede analogamente fattorizzando per i coker per i termini successivi.

Partendo dalle successioni esatte

$$0 \to B^i(K^\circ) \to Z^i(K^\circ) \to H^i(K^\circ) \to 0$$

$$0 \to Z^i(K^\circ) \to K^i \to B^{i+1}(K^\circ) \to 0$$

e scegliendo due qualunque risoluzioni di $B^i(K^\circ)$ e $H^i(K^\circ)$ si arriva a risolvere K^i grazie alla prop., e tutto spezza per costruzione.

Posto $L^{i,j} := I^j_{K^i}$, con differenziali $d_2^{ij} = (-1)^{-j} d^j_{I_{K^i}} : I^j_{K^i} \to I^{j+1}_{K^i}$ e d_1^{ij} la composizione

$$I^j_{K^i} \to I^j_{B^{i+1}(K^\circ)} \to I^j_{Z^{i+1}(K^\circ)} \to I^j_{K^{i+1}}$$

abbiamo una risoluzione di Cartan-Eilenberg.

<u>Lemma</u>: Data una risoluzione di C-E di K°, il morfismo indotto $\tilde{\varepsilon} : K^\circ \to L^\circ_{tot}$ è un quasi-isomorfismo.

In particolare dato un funtore additivo esatto a sinistra

$$RG(K^\circ) = G(L^\circ_{tot})$$

<u>dim</u>:

$$0 \to K^i \xrightarrow{\varepsilon} L^{i,0} \xrightarrow{d_2} L^{i,1} \to \dots$$

Per ipotesi $H^q_{d_2}(L^{p,\circ}) = 0 \quad \forall q>0 \quad \forall p$, dunque ${}'E_1^{p,q}$ è nulla tranne la riga 0.

Inoltre $K^p \cong H^0_{d_2}(L^{p,\circ}) = {}'E_1^{p,0}$ e quindi $H^p(K^\circ) = {}'E_2^{p,0}$ e gli altri sono nulli, quindi già degenera ${}'E_\infty^{p,0} = H^p(K^\circ)$.

Si vede facilmente che questo implica che la filtrazione sull'oggetto finale $E^n = H^n(L^\circ_{tot})$ è banale (tutta concentrata al passo n) e quindi

$$H^n(L^\circ_{tot}) = E^n = {}'E_\infty^{n,0} = {}'E_2^{n,0} = H^n(K^\circ) \qquad \square$$

<u>dim</u> (Grothendieck)

Sia $I_X^\bullet$ una risoluzione di X, e sia $K^\bullet = F(I_X^\bullet) = RF(X)$

Sia $L^{\bullet,\bullet}$ risoluz. di Cartan-Eilenberg di $K^\bullet$ e consideriamo $G(L^{\bullet,\bullet})$.

Per additività di G, $G(L^\bullet_{tot}) = G(L)^\bullet_{tot}$.

$$''E_2^{p,q} = H_d^p(H_\delta^q(G(L^{\bullet,\bullet})))$$

Per proprietà di spezzamento della C-E si ha

$$H^q_\delta(G(L^{\bullet,p})) = G(H^q_\delta(L^{\bullet,p})) \quad \text{(sempre per additività di } G\text{)}$$

Siccome $H^q_\delta(L^{\bullet,p})$ risolve $H^q(K^\bullet)$, $G(H^q_\delta(L^{\bullet,p})) = RG(H^q(K^\bullet)) =$
$= RG(R^qF(X))$

E quindi $''E_2^{p,q} = R^pG(R^qF(X))$.

D'altra parte la succ. spettrale converge a

$$H^{p+q}(G(L)^\bullet_{tot}) = H^{p+q}(G(L^\bullet_{tot})) \underset{\text{lemma}}{=} H^{p+q}(RG(K^\bullet)) =$$
$$= H^{p+q}(RG(RF(X))) = H^{p+q}(RG\circ RF)(X) \underset{\text{teorema 1}}{=} H^{p+q}(R(G\circ F))(X) =$$
$$= R^{p+q}(G\circ F)(X)$$

$\square$

Applicazione: successione spettrale di Leray

$f: X \to Y$ continua tra sp. top.

$\mathcal{A} = Sh_{Ab}(X)$ $\quad \mathcal{B} = Sh_{Ab}(Y)$ $\quad \mathcal{C} = Ab$

$F = f_*$ immagine diretta

$G = \Gamma_Y$ sezioni su Y $\qquad G\circ F = \Gamma_X$ sezioni su X

<u>da dim</u>: F manda iniettivi in iniettivi (dopo)

A quel punto Grothendieck ci dice che $\forall\, \mathcal{F}$ fascio su X

$\exists$ succ. spettrale t.c. $E_2^{p,q} = H^p(Y, R^qf_*\mathcal{F}) \Rightarrow H^{p+q}(X, \mathcal{F})$

<u>Lemma</u>: un funtore F aggiunto sinistro di G preserva gli iniettivi se G preserva i monomorfismi

<u>dim</u>: segue dalla def. di oggetto iniettivo per mezzo dei morfismi

$\mathcal{C}$ categoria abeliana, I iniettivo $\Leftrightarrow$ $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-,I)$ è esatto.

Voglio vedere che fa $\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(-,F(I))$ $\qquad F:\mathcal{C}\to\mathcal{D}$, $G:\mathcal{D}\to\mathcal{C}$

$0\to M\to N\to P\to 0$ esatta in $\mathcal{D}$

$0\to \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(P,F(I))\to \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(N,F(I))\to \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(M,F(I))$ sempre vero perché Hom è esatto a sx.

Per aggiuntezza di F e G abbiamo

$0\to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(G(P),I)\to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(G(N),I)\to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(G(M),I)$.

Per ipotesi G preserva i mono $\Rightarrow$ $0\to G(M)\to G(N)\to G(P)$ è esatta

Allora per esattezza di $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-,I)$ guadagniamo lo zero a destra $\square$

Concludiamo Leray osservando che f_* ha un aggiunto destro (f^{-1} per i fasci di gruppi, f^* per gli $\mathcal{O}_X$-moduli) ed essendo f^{-1} esatto e f^* esatto se f piatta rientriamo nelle ipotesi del lemma. $\square$

Esempi

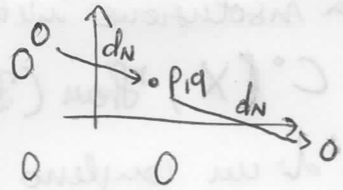
[1] Succesione esatta degli Ext (fasci)

Prop 1: Sia $K^\bullet$ complesso filtrato t.c. $F^pH^n = 0$ per $p > n$
(ad es. $K^\bullet$ complesso totale di un complesso doppio)
e tale che $E_0^{p,q} = 0 \quad \forall p, q < 0$ (sempre cpx totale come esempio)
Allora

1) $E_N^{p,q} = E_\infty^{p,q}$ se $N > p$ e $N > q+1$
2) $\exists$ una successione esatta

$$0 \to E_\infty^{1,0} \to H^1(K^\bullet) \to E_2^{0,1} \to E_2^{2,0} \to H^2(K^\bullet)$$

dim: 1) Dal disegno



2) (a) $0 \to A \to B \to C \to 0$ esatta e $0 \to C \to D \to E$ esatta si incollano $0 \to A \to B \to D \to E$.

(b) $0 \to E_\infty^{1,0} \to H^1(K^\bullet) \to E_\infty^{0,1} \to 0$ ~~esatta~~ per def. di $E_\infty^{p,q}$ e esatta ipotesi sulla filtrazione

$0 \to E_2^{0,1} \to E_2^{2,0} \to 0$ (non esatta)

$0 \to d_2(E_2^{0,1}) \to E_2^{2,0} \to E_3^{2,0} \to 0$ esatta, $E_3^{2,0} = E_\infty^{2,0}$

$0 \to \operatorname{Ker}(d_2 : E_2^{0,1} \to E_2^{2,0}) \to E_2^{0,1} \to d_2(E_2^{0,1}) \to 0$ esatta, $\operatorname{Ker}(d_2) = E_3^{0,1} = E_\infty^{0,1}$

$0 \to E_\infty^{2,0} \to H^2(K^\bullet)$ esatta (per hp su filtrazione)

attacco tutto e ottengo la tesi $\square$

Sia ora X schema separato, $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ fasci (quasi)coerenti di $\mathcal{O}_X$-moduli (sinistri)
Consideriamo i due funtori $\mathcal{G} \longmapsto \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$

$\mathcal{G} \longmapsto \operatorname{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$

I rispettivi funtori derivati classici si indicano con
$\mathcal{E}xt^n_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F},\mathcal{G})$ e $Ext^n_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F},\mathcal{G})$

OSS: vale $\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F},\mathcal{G})$ aciclico (fiacco) se $\mathcal{G}$ è iniettivo.

Teorema (SUCC. SPETTRALE DEGLI EXT)

X, $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$ come sopra. Esiste allora una successione spettrale tale che $E_2^{p,q} = H^p(X; \mathcal{E}xt^q_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F},\mathcal{G}))$, che converge a $Ext^{p+q}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F},\mathcal{G})$.

dim: Consideriamo una risoluzione iniettiva $I^\circ(\mathcal{G})$ e il complesso doppio $K^{\circ,\circ} = C^\circ(X; \mathcal{H}om(\mathcal{F}, I^\circ(\mathcal{G})))$ (cocatene di Čech)

Dalla succ. spettrale di un complesso doppio abbiamo

$${}'E_1^{p,q} = H^q(C^p(X; \mathcal{H}om(\mathcal{F}, I^\circ(\mathcal{G})))) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{esattezza} \\ \text{di } C^\circ}}{=} C^p(X; \mathcal{H}^q(\mathcal{H}om(\mathcal{F}, I^\circ(\mathcal{G}))))$$

dunque ${}'E_2^{p,q} = H^p(X; \mathcal{E}xt^q(\mathcal{F},\mathcal{G}))$

D'altra parte ${}''E_1^{p,q} = H^p(X; \mathcal{H}om(\mathcal{F}, I^q(\mathcal{G})))$

Per aciclicità di $\mathcal{H}om(\mathcal{F}, I^q(\mathcal{G}))$ la successione degenera e sopravvivono solo i pezzi per $p=0$.

Allora $H^{p+q}(K^\circ) = {}''E_\infty^{0,p+q} = {}''E_2^{0,p+q} = H^{p+q}(\mathcal{H}om(\mathcal{F}, I^\circ(\mathcal{F}))) =$
$= Ext^{p+q}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F},\mathcal{G})$ □

[Applichiamo poi la prop 1 per ottenere la succ. esatta]

$\boxed{2}$ CALCOLO DEGLI EXT CON DIVERSE RISOLUZIONI

A, B R-moduli: $B \to I^\circ$ ris iniettiva $P^\circ \to A$ ris. proiettiva

$K^{\circ,\circ} = Hom_R(P^\circ, I^\circ) \to$ successione spettrale del complesso doppio

Calcolando le due filtrazioni, si vede che degenerano già alla prima pagina. Dunque $H^n(K^\circ_{tot}) = {}^I Ext^n_R(A,B) = {}^P Ext^n_R(A,B)$
dove ${}^I Ext$ è calcolato sulla ris. iniettiva di B e
${}^P Ext$ è calcolato sulla ris. proiettiva di A