Che cos'è uno "spazio"?

Punto di partenza: gli oggetti matematici vivono in categorie.

Nelle categorie vale il lemma di Yoneda:

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{C} & \hookrightarrow & \hat{\mathcal{C}} = PSh(\mathcal{C}) \\ X & \longmapsto & h_X := \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-,X) \end{array} \qquad \text{pienamente fedele}$$

(A) Esempio (topologico) Una varietà topologica è incollamento di aperti di $\mathbb{R}^n$ via omeomorfismi

(B) Esempio (differenziale) ... differenziale ... $\mathbb{R}^n$ ... diffeomorfismi

(C) Esempio (olomorfo) ... complessa ... $\mathbb{C}^n$ ... applicazioni olomorfe

(D) Esempio (algebrico) Uno schema è incollamento di schemi affini

In tutti i casi c'è una categoria di "modelli" (nel senso più sartoriale del termine) che vengono incollati.

Quando c'è da incollare, stiamo sempre parlando di FASCI!

Esempio (A) $\mathcal{O}$ = sottocategoria piena di VarTop i cui oggetti sono gli aperti di $\mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$

abbiamo il funtore h: VarTop $\xrightarrow{h} Sh(\mathcal{O}, \tau)$ pienamente fedele

$$X \longmapsto \left(h_X : \underset{\mathbb{R}^n}{U \cap} \longmapsto \mathrm{Hom}_{\mathrm{VarTop}}(U, X) \right)$$

dove τ è la topologia di Grothendieck i cui ricoprimenti sono generati

$$\{U_i \to U\}_{i \in I} \quad \text{dove} \quad U_i \hookrightarrow U \ \forall i \ \text{e} \ \coprod_i U_i \twoheadrightarrow U.$$

Quindi si potrebbe dire che ~~#~~ una varietà topologica "è" un fascio $F \in Sh(\mathcal{O}, \tau)$ che è (inoltre) un funtore rappresentabile $F \simeq h_X$

e cercare ~~de~~ di estendere le nozioni usuali (sottovarietà, aperti, etc) (omeomorfismi locali) in questo contesto, cercando di caratterizzare l'immagine essenziale del funtore h_-.

Generalizziamo:

<u>Contesti geometrici</u>

Sia $\mathcal{C}$ una categoria, τ una topologia subcanonica. Pensiamo $\mathcal{C} \subset Sh(\mathcal{C}, \tau)$ via Yoneda. Sia $\mathbb{P}$ una classe di morfismi in $\mathcal{C}$

Def Una famiglia di morfismi $\{X_i \to X\}_i$ in $\mathcal{C}$ è un <u>$\mathbb{P}$-ricoprimento</u> se

$$\forall i \quad X_i \to X \text{ è in } \mathbb{P} \quad \text{e} \quad \coprod_i h_{X_i} \to h_X \text{ è epimorfismo di fasci}$$

è un <u>$\mathbb{P}$-ricoprimento aperto</u> se in più ogni $h_{X_i} \to h_X$ è monomorfismo.

Def Un <u>contesto geometrico</u> è il dato di $(\mathcal{C}, \tau, \mathbb{P})$ dove

- τ è subcanonica
- i morfismi di $\mathbb{P}$ sono <u>localmente quadrabili</u>, [i.e. $\forall f: X \to Y$ in $\mathbb{P}$, $\exists$ un $\mathbb{P}$-ricoprimento aperto $\{X_i \to X\}_i$ t.c. $\exists\, Z \times_Y X_i$ $\forall Z \in$

$$\begin{array}{ccc} & & X_i \\ & & \downarrow \\ & & X \\ & & \downarrow \\ \forall Z & \to & Y \end{array}$$
]

- $\mathbb{P}$ è stabile per composizione e cambiamento di base, contiene le identità [$\Rightarrow$ contiene gli isomorfismi]

ed è <u>locale per la topologia τ</u> [i.e. ▪ $f: X \to Y$ in $\mathcal{C}$ t.c. $\exists \{Y_i \to Y\}$ ricoprimento t.c. $f_i: X \times_Y Y_i \to Y$ è in $\mathbb{P}$ $\Rightarrow f \in \mathbb{P}$

▪ $f: X \to Y$ in $\mathcal{C}$, $\exists \{X_i \to X\}$ $\mathbb{P}$-ricoprimento t.c. $X_i \to Y$ è in $\mathbb{P}$ $\Rightarrow f \in \mathbb{P}$]

- $(\mathcal{C}, \tau, \mathbb{P})$ è compatibile con le somme finite

$\ulcorner$ i.e. * $\mathcal{C}$ ammette somme finite

* $\forall$ famiglia finita di oggetti $\{X_i\}_{i\in I}$ in $\mathcal{C}$, $\{X_j \to \coprod_i X_i\}_{j\in I}$ è un $\mathbb{P}$-ricoprimento

* Le somme finite sono disgiunte: $\forall \{X_i\}_{i\in I}$ $|I|<\infty$ in $\mathcal{C}$,

$$X_j \times_{\coprod_i X_i} X_k \simeq \begin{cases} \emptyset & \text{se } j\neq k \\ X_j = X_k & \text{se } j=k \end{cases}$$

* $\forall X \in \mathcal{C}$ se $\exists$ due fasci su $\mathcal{C}$ tali che $h_X \simeq F \amalg G$
$\Rightarrow \exists Y \in \mathcal{C}$ t.c. $h_Y \simeq F$ $\lrcorner$

- i morfismi di $\mathbb{P}$ possiedono immagini aperte

$\ulcorner$ i.e. $\forall f: X \to Y$ in $\mathbb{P}$ $\exists$ una famiglia $\{X_i' \to Y\}_{i\in I}$ in $\mathbb{P}$ tale che
$\forall i \in I$ $X_i' \to Y$ sono monomorfismi e
l'immagine di $h_X \to h_Y$ è la stessa di $\coprod_i h_{X_i'} \to h_Y$ $\lrcorner$

Esempi (A) $\mathcal{C}$ = sottocategoria piena di Top generata da $\mathcal{O}$ aggiungendo $\coprod$ finite
τ solita, $\mathbb{P}$ = omeomorfismo locali

(A') $\mathcal{C}$ = Top, τ solita, $\mathbb{P}$ = omeo locali

(B) $\mathcal{C}$ = somme disgiunte finite di aperti di $\mathbb{R}^n$, $n\geq 0$, morfismi C^∞
τ solita, $\mathbb{P}$ = diffeomorfismo locali

(B') come sopra ma $\mathbb{P}$ = sommersioni

(C) $\mathcal{C} = \coprod_{i\in I \text{ } <\infty} V_{i} \subseteq \mathbb{C}^{n_i}$ (n varia) morfismi olomorfi, τ solita

$\mathbb{P}$ = olomorfe lisce

$(\mathcal{C}, \tau, \mathbb{P})$ contesto geometrico

Def • $X \in \mathcal{C}$. $f: F \to h_X$ è una immersione aperta se è un monomorfismo e se esiste una famiglia di morfismi $\{X_i \to X\}$ in $\mathbb{P}$ tali che l'immagine di f è uguale a quella di $\coprod_i h_{X_i} \to h_X$

• $f: F \to G$ è un'immersione aperta se $\forall X \in \mathcal{C}$ e $\forall h_X \to G$ il morfismo indotto $F \times_G h_X \to h_X$ è una immersione aperta nel senso indicato sopra.

Def $F \in Sh(\mathcal{C}, \tau)$ è una varietà (rispetto a $(\mathcal{C}, \tau, \mathbb{P})$) se $\exists \{U_i\}_i \subset \mathcal{C}$ e $p: \coprod_{i \in I} h_{U_i} \to F$ tale che p è un epimorfismo di fasci e $\forall i \in I$ $h_{U_i} \to F$ è un'immersione aperta

$(\{U_i\}, p)$ è un atlante aperto di F

Esempi: Ogni contesto geometrico ha le sue varietà: (A), (A)' $\Rightarrow$ varietà topologiche
(B), (B)' $\Rightarrow$ — differenziabili
(C) $\Rightarrow$ — complesse

Def • $f: F \to G$ in $Sh(\mathcal{C}, \tau)$ è rappresentabile se $\forall X \in \mathcal{C}$, $\forall h_X \to G$, $h_X \times_G F$ è una varietà

• $f: F \to G$ ha la proprietà $\mathbb{P}$ se è rappresentabile e se $\forall X \in \mathcal{C}$, $\forall h_X \to G$ $\exists$ un atlante $p: \coprod_i h_{U_i} \to F \times_G h_X$ tale che $\forall i$ il morfismo indotto $\pi_2 \circ p \circ e_i = h_{U_i} \to h_X$ corrisponde a un morfismo $U_i \to X$ in $\mathcal{C}$ che appartiene a $\mathbb{P}$

Lemma 1 Ogni immersione aperta ha la proprietà $\mathbb{P}$

2 $X \in \mathcal{C}$, $F \to h_X$ e $\{X_i \to X\}$ ricoprimento t.c. $X_i \to X$ monomorfismo e in $\mathbb{P}$ e $\forall i$ $F \times_{h_X} h_{X_i}$ è una varietà. Allora F è una varietà

3 I morfismi che hanno la proprietà $\mathbb{P}$ sono stabili per composizione e cambiamento di base

4 $f: X \to Y$ in $\mathcal{C}$ è in $\mathbb{P}$ $\Leftrightarrow$ $h_f: h_X \to h_Y$ ha la proprietà $\mathbb{P}$

5 $f: X \to Y$ induce un'immersione aperta $h_f: h_X \to h_Y$ $\Leftrightarrow$ f è in $\mathbb{P}$ ed è monomorfismo in $\mathcal{C}$

Def $F \in Sh(\mathcal{C}, \tau)$ è uno spazio geometrico se $\exists$ $\{U_i\}_{i \in I}$ in $\mathcal{C}$ e

$p: \coprod_i h_{U_i} \to F$ tali che · p è un epimorfismo di fasci

· $\forall i \in I$ $h_{U_i} \to F$ ha la proprietà $\mathbb{P}$

Proposizione F spazio geometrico. Allora esiste una varietà X e una relazione di equivalenza $R \subset X \times X$ tali che

$$F \simeq X/R = \mathrm{colim}\,(R \rightrightarrows X), \qquad R \hookrightarrow X \times X \rightrightarrows X \text{ sono in } \mathbb{P}$$

$\ulcorner$ Attraverso $p: \coprod_i h_{U_i} \to F$, definiamo $X := \coprod h_{U_i}$, $R := X \times_F X \rightrightarrows X$

$$\Rightarrow F \simeq \mathrm{colim}\,(X \times_F X \rightrightarrows X) \quad (\text{perché } X \to F \text{ è epi})$$

$R = X \times_F X \simeq \coprod_{ij} h_{U_i} \times_F h_{U_j}$ è una varietà e $h_{U_i} \times_F h_{U_j} \to h_{U_j}$ è in $\mathbb{P}$ perché ogni $h_{U_i} \to F$ lo è

$\Rightarrow R \to X$ in $\mathbb{P}$ $\lrcorner$

Caso algebrico: Una varietà algebrica affine su $\mathbb{C}$ è qualcosa tipo

$X = \{ \underline{x} \in \mathbb{C}^n \mid f_i(\underline{x}) = 0 \quad \forall i = 1, \dots, m \}$ dove $f_i \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$

è completamente determinata da $\mathcal{O}(X) = \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n] / (f_1, \dots, f_m)$ def: $X = \operatorname{Spec}(\mathcal{O}(X))$

Questo definisce un funtore $h_X : \mathrm{CAlg}_{\mathbb{C}} \to \mathrm{Set}$

$A \longmapsto \operatorname{Hom}_{\mathrm{CAlg}_{\mathbb{C}}}(\mathcal{O}(X), A) \cong \{ (a_1, \dots, a_n) \in A^n \mid f_i(a_1, \dots, a_n) = 0 \}$

Idea: $\mathcal{C} = \mathrm{Aff} := \mathrm{CAlg}_k^{op}$ è la nostra categoria base (k = anello qualsiasi)

Esempi: • $F : \mathrm{Aff}^{op} \to \mathrm{Set}$
$A \longmapsto A$

$\Rightarrow A \simeq \operatorname{Hom}_{\mathrm{CAlg}_k}(k[x], A)$

$\Rightarrow F \simeq h_{k[x]}$ $\qquad \operatorname{Spec} k[x] = \mathbb{A}^1$

• $\mathbb{P}^n : \mathrm{Aff}^{op} \to \mathrm{Set}$ $\qquad n \in \mathbb{N}$

$A \longmapsto \{ L \subset A^{n+1} \text{ sottomodulo} \mid L \text{ proiettivo e } \forall K \text{ campo}, \forall A \to K \ \dim_K L \otimes_A K = 1 \}$

$\exists P \subset A^{n+1}$ t.c. $P \oplus L \simeq A^{n+1}$

$f \downarrow \qquad \downarrow L \mapsto L \otimes_A B$

$B \qquad \{ \dots \}$ Non è affine!

• G_m?

Def $A \to B$ in CRing è piatto se $B \otimes_A - : A\text{-Mod} \to B\text{-Mod}$ è esatto.

è fedelmente piatto se $B\otimes -$ è esatto e conservativo $[B \otimes M \simeq 0 \Rightarrow M \simeq 0]$

Oss sono stabili per co-cambiamento di base

Def $\{A \to A_i\}_{i \in I}^{\mathrm{CRing}}$ è un ricoprimento fedelmente piatto e quasi-compatto (fpqc)

se
- I è finito
- $\forall i \in I$ $A \to A_i$ è fedelmente piatto
- $A \to \prod_i A_i$ è fedelmente piatto

Lemma I ricoprimenti fpqc in Aff definiscono una topologia di Grothendieck subcanonica

Def $C \to C_0$ estensione a quadrato nullo in CRing. $f: A \to B$ è liscia se

$$\forall \quad \begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & C \\ \downarrow & & \downarrow \\ B & \longrightarrow & C_0 \end{array}$$

$\exists\ B \xrightarrow{g} C$ che fa commutare il diagramma

e B è un A-modulo di presentazione finita.

f è étale se inoltre tale g è unico

Oss $\{$ricoprimenti étale$\} \subset \{$ricoprimenti fpqc$\}$

Definiamo
$$\mathcal{C} = \mathrm{Aff}$$
$$\tau_{et} = \text{ricoprimenti fpqc con } A \to A_i \text{ étale } \forall i$$
$$\mathbb{P} = \text{morfismi lisci}$$

Teorema $(\mathcal{C}, \tau_{et}, \mathbb{P})$ è un contesto geometrico

Def Le varietà in questo contesto geometrico sono chiamate schemi, gli spazi geometrici sono chiamati spazi algebrici

Proposizione X schema, G schema affine in gruppi, $G \curvearrowright X$ senza punti fissi

$\Rightarrow X/G$ è rappresentabile da uno spazio algebrico

REFERENZE :

NOTE del CORSO di MASTER "STACK ALGEBRICI"
[B. TOËN, TOLOSA 2005]

disponibili all'indirizzo :

perso.math.univ-toulouse.fr/btoen/videos-lecture-notes-etc/