INTRODUZIONE E RICHIAMI

LO SCOPO DI QUESTO SEMINARIO È QUELLO DI PARTIRE DALLE COSTRUZIONI VISTE NEI PRECEDENTI SEMINARI NEL CONTESTO DELLE COALGEBRE AL FINE DI INTRODURRE LA GIUSTA NOZIONE DI MORFISMI TRA ALGEBRE L_∞.
UNA VOLTA INDIVIDUATA, VEDREMO ALCUNE SEMPLICI PROPRIETÀ, COME L'HOMOTOPY TRANSFER.

NELLO SCORSO SEMINARIO ABBIAMO INTRODOTTO LA NOZIONE DI **ALGEBRE L_∞** COME DEGLI OGGETTI DELLA FORMA

$$(M, \ell_1, \ell_2, \cdots) \qquad \text{con} \qquad \begin{array}{l} M \in GMod(R) \\ \ell_n \in Hom_R^{2-n}(M^{\wedge n}, M) \end{array}$$

IN CUI LE MAPPE ANTISIMMETRICHE SONO VINCOLATE A RISPETTARE LA SEGUENTE CONDIZIONE:

$$\sum_{K=1}^{n} (-1)^{n-k} \sum_{\sigma \in SC(k,n-k)} \chi(\sigma) \quad \ell_{n-k+1}\left(\ell_k(x_{\sigma(1)} \wedge \cdots \wedge x_{\sigma(k)}) \wedge x_{\sigma(k+1)} \wedge \cdots \wedge x_{\sigma(n)} \right). \qquad (1)$$

LA DIFFICOLTÀ NEL GESTIRE I SEGNI E I GRADI DELLE MAPPE ℓ_n, CI HA SPINTO AD INTRODURRE LA NOZIONE DI **ALGEBRA $L_\infty[1]$** SOSTITUENDO LE MAPPE ANTISIMMETRICHE CON DEI MORFISMI SIMMETRICI. UN'ALGEBRA $L_\infty[1]$ È IL DATO DI:

$$(M, q_1, q_2, \cdots) \qquad \text{con} \qquad \begin{array}{l} M \in GMod(R) \\ q_n \in Hom_R^{1}(M^{\odot n}, M) \end{array}$$

CIOÈ POSSIAMO "RIASSUMERE" LA STRUTTURA IN UN UNICO MORFISMO $q = \sum_{n>0} q_n \in Hom_R^1(\bar{S}^c M, M)$ CHE SODDISFI LA SEGUENTE CONDIZIONE:

$$\sum_{K=1}^{n} \sum_{\sigma \in SC(k,n-k)} \varepsilon(\sigma) \quad q_{n-k+1}\left(q_k(x_{\sigma(1)} \odot \cdots \odot x_{\sigma(k)}) \odot x_{\sigma(k+1)} \odot \cdots \odot x_{\sigma(n)} \right). \qquad (2)$$

ABBIAMO INOLTRE VISTO CHE QUESTE DUE STRUTTURE SONO COLLEGATE DAL **MORFISMO DI DÉCALAGE**, CHE IN QUESTO CASO, È UN ISOMORFISMO:

$$- \text{déc} : \{\text{strutture } L_\infty[1] \text{ su } M\} \xrightarrow{\cong} \{\text{strutture } L_\infty \text{ su } M\}$$
$$q_k \ \text{con } (2) \longmapsto \ell_k = -(-1)^{\sum_i (k-i)\bar{v}_i} s q_K \ \text{con } (1)$$

GRAZIE A QUESTO FATTO POSSIAMO PARLARE SOLO DI ALGEBRE $L_\infty[1]$ SU M LA CUI STRUTTURA È PIÙ SEMPLICE DA GESTIRE. NONOSTANTE QUESTO MIGLIORAMENTO, LA CONDIZIONE (2) RIMANE COMUNQUE COMPLICATA. PER MIGLIORARLA DOBBIAMO RICORDARCI DI UN ALTRO IMPORTANTE ISOMORFISMO INTRODOTTO:

$$\chi : Hom_R^*(\bar{S}^c M, M) \xrightarrow{\cong} coder_R^*(\bar{S}^c M, \bar{S}^c M)$$

IN CUI AD OGNI CODERIVAZIONE Q ERA ASSOCIATA LA SUA CORESTRIZIONE TRAMITE IL COGENERATORE $p_M : \bar{S}^c M \longrightarrow M$, CIOE' $q = p_M Q$. VICEVERSA DATO UN MORFISMO $q : \bar{S}^c M \longrightarrow M$, LA CODERIVAZIONE Q DEFINITA PER OGNI COMPONENTE DI $\bar{S}^c M = \bigoplus_{n>0} M^{\odot n}$ ERA DELLA FORMA:

$$Q = \sum_{i=1}^{n} Q_{n,i} \quad M^{\odot n} \longrightarrow \bigoplus_{i=1}^{n} M^{\odot n-i+1}$$

$$(x_1 \odot \cdots \odot x_n) \longmapsto \left(\sum_{i=1}^{n} \sum_{\sigma \in S(i,n-i)} \varepsilon(\sigma)\, q_i(x_{\sigma(1)} \odot \cdots \odot x_{\sigma(i)}) \odot x_{\sigma(i+1)} \odot \cdots \odot x_{\sigma(n)} \right))$$

INDICHEREMO CON $Q_{n,i} : M^{\odot n} \longrightarrow M^{\odot n-i+1}$ LA COMPONENTE DELLA CODERIVAZIONE Q.

CON QUESTA NOTAZIONE E' CHIARO CHE LA CONDIZIONE (2) DIVENTA:

$$\sum_{i=1}^{n} q_{n-i+1} Q_{n,i} = 0$$

RICORDIAMO INOLTRE CHE OGNI MORFISMO DI COALGEBRE E' UNIVOCAMENTE DETERMINATO DALLA SUA CORESTRIZIONE, IN PARTICOLARE:

$$\begin{tikzcd}
 & & \bigoplus_{k=1}^{i} M^{\odot k} \arrow[d, "p_M"] \\
M^{\odot n} \arrow[r, "Q"] & \bigoplus_{i=1}^{n} M^{\odot n-i+1} \arrow[ur, "Q"] \arrow[r, dash, "q_{n-i+1}"'] \arrow[ur, phantom, "\circlearrowright"', shift right=3] & M
\end{tikzcd}$$

$$\sum_{i=1}^{n} q_{n-i+1} Q_{n,i} = 0 \iff p_M Q^2 = 0 \iff Q^2 = 0$$

DUNQUE ABBIAMO CHE, FISSATO $M \in GMod(R)$:

$$\left\{ \begin{matrix} \ell \in Hom^1(\bigoplus_{n>0} M^{\wedge n}, M) \\ \text{CON } (1) \end{matrix} \right\} \underset{\text{-déc}}{\overset{\cong}{\longleftrightarrow}} \left\{ \begin{matrix} q \in Hom^1(\bar{S}^c M, M) \\ \text{CON } (2) \end{matrix} \right\} \underset{\not\approx}{\overset{\cong}{\longleftrightarrow}} \left\{ \begin{matrix} Q \in coder^1(\bar{S}^c M, \bar{S}^c M) \\ \text{CON } Q^2 = 0 \end{matrix} \right\}$$

QUESTO SARA' IL PUNTO DI PARTENZA PER IL NOSTRO SEMINARIO.

MORFISMI L_∞

OGNI VOLTA CHE SI INTRODUCE UNA NUOVA STRUTTURA SI CERCA DI CAPIRE QUALE SIA LA GIUSTA NOZIONE DI MORFISMO IN MODO DA POTER LAVORARE CON UNA CATEGORIA CHE ABBIA ABBASTANZA PROPRIETA'.

IN QUESTO CONTESTO, AVENDO A CHE FARE CON OGGETTI DELLA FORMA (M,q) CON $M \in GMod(R)$ E $q \in Hom^1(\bar{S}^c M, M)$, VIENE NATURALE DEFINIRE I MORFISMI COME MORFISMI DI MODULI CHE COMMUTANO CON LA STRUTTURA. QUESTO PRIMO TENTATIVO SI DIMOSTRERA' NON ESSERE SUFFICIENTE PER QUESTA CATEGORIA MA E' ABBASTANZA IMPORTANTE DA MERITARE UN NOME:

DEF: UN **MORFISMO LINEARE** (O **STRICT**) DI ALGEBRE $L_\infty[1]$ E' $f : (M,q) \longrightarrow (N,p)$ CON $f : M \longrightarrow N$ MORFISMO DI MODULI GRADUATI t.c. $p\bar{f} = fq$, CIOE':

$$\begin{tikzcd}
\bar{S}^c M \arrow[r, "\bar{f}"] \arrow[d, "q"'] & \bar{S}^c N \arrow[d, "p"] & & M^{\odot n} \arrow[r, "f^{\odot n}"] \arrow[d, "q_n"'] & N^{\odot n} \arrow[d, "p_n"] \\
M \arrow[r, "f"'] & N \arrow[r, phantom, "\Rightarrow"] & & M \arrow[r, "f"'] & N
\end{tikzcd}$$

$\forall n \geq 0, \ p_n f^{\odot n} = f q_n$.

OSS: CONSIDERIAMO $\tilde{L}_\infty[1]$ COME LA CATEGORIA I CUI OGGETTI SONO LE ALGEBRE $L_\infty[1]$ E I MORFISMI SONO QUELLI APPENA DEFINITI. POSSIAMO DEFINIRE UN FUNTORE:

$$\begin{tikzcd}
F: \tilde{L}_\infty[1] \arrow[r] & DGMod(R) \\
(M,q) \arrow[r, mapsto] \arrow[d, "f"'] & (M,q_1) \arrow[d, "f"] \\
(N,p) \arrow[r, mapsto] & (N,p_1)
\end{tikzcd}$$

CHE E' BEN DEFINITO GRAZIE ALLA CONDIZIONE DI COMMUTATIVITA' PER $n=1$, MA NON E' PIENO ← *Non tutti i morfismi in $DGMod(R)$ sono morfismi in $\tilde{L}_\infty[1]$*

LAVORARE CON QUESTI MORFISMI E' MOLTO COMODO A CAUSA DELLA LORO DEFINIZIONE E MOLTI RISULTATI POSSONO ESSERE PROVATI A PARTIRE DA QUESTI.

NONOSTANTE QUESTO, IL FATTO DI AVER TROVATO NELL'AMBITO DELLE COALGEBRE UN MODO "PULITO" DI SCRIVERE LA CONDIZIONE (2), CI SPINGE A CERCARE UN ALTRO MODO DI DEFINIRE I MORFISMI. IN PARTICOLARE L'ISOMORFISMO χ CI PERMETTE DI COSTRUIRE UN "FUNTORE":

$$\begin{tikzcd}
G: L_\infty[1] \arrow[r] & ??? \\
(M,q,(2)) \arrow[r, mapsto] & (\underset{\text{Coalgebra graduata}}{\bar{S}^c M}, \overset{\text{coderivazione a quadrato nullo}}{Q}, Q^2=0)
\end{tikzcd}$$

DOVE LE VIRGOLETTE SONO DOVUTE AL FATTO CHE NON CONOSCIAMO I MORFISMI, NE TANTOMENO LA CATEGORIA D'ARRIVO. DALLA STRUTTURA DELL'OGGETTO $(\bar{S}^c M, Q)$ POSSIAMO RICAVARE LE CARATTERISTICHE DELLA CATEGORIA D'ARRIVO, DEFINENDO:

DEF: LA CATEGORIA DELLE **COALGEBRE DIFFERENZIALI GRADUATE** E' IL DATO DI:

- OGGETTI DELLA FORMA $((C,\Delta),Q)$ CON $(C,\Delta) \in GC(R)$, $Q \in coder^1(C,C)$ E $Q^2=0$
- MORFISMI $F: ((C,\Delta_C),Q) \longrightarrow ((D,\Delta_D),P)$ CHE SONO MORFISMI DI COALGEBRE t.c. $PF = FQ$

INDICHEREMO CON **DGC(R)** QUESTA CATEGORIA E OMETTEREMO IL COPRODOTTO PER NON APPESANTIRE LA NOTAZIONE.

L'IDEA ORA E' QUELLA DI "TIRARE INDIETRO" LA NOZIONE DI MORFISMO DA QUELLO DELLE COALGEBRE GRADUATE DIFFERENZIALI.

DEF: DATE (M,q), $(N,p) \in L_\infty[1]$, UN **L_∞-MORFISMO** E' $f:(M,q) \dashrightarrow (N,p)$ MORFISMO DI MODULI GRADUATI T.C. $F=G(f):(\bar{S}^cM,Q) \longrightarrow (\bar{S}^cN,P)$ E' UN MORFISMO DI COALGEBRE DIFFERENZIALI GRADUATE

CON QUESTA DEFINIZIONE DI MORFISMI E' CHIARO CHE POSSIAMO IDENTIFICARE LA CATEGORIA DELLE ALGEBRE $L_\infty[1]$ COME LA SOTTOCATEGORIA PIENA IN $DGC(R)$ DI CUI OGGETTI SONO DELLA FORMA $G(M,q)$ PER QUALCHE (M,q) ALGEBRA $L_\infty[1]$.

NEL TENTATIVO DI FORNIRE UNA DESCRIZIONE ESPLICITA DI QUESTI MORFISMI, ANDIAMO AD ANALIZZARE NEL DETTAGLIO LA DEFINIZIONE APPENA DATA.

OSS: SIA $f:(M,q) \dashrightarrow (N,p)$ MORFISMO L_∞ $\Rightarrow$ $F:(\bar{S}^cM,Q) \rightarrow (\bar{S}^cN,P)$ E' MORFISMO IN $DGC(R)$.
SE CI "DIMENTICHIAMO" DEI DIFFERENZIALI, F E' UN MORFISMO DI COALGEBRE GRADUATE, DUNQUE E' UNIVOCAMENTE DETERMINATO DALLA PROPRIA CORESTRIZIONE PER UN COGENERATORE DI $\bar{S}^cN$ CHE ABBIAMO VISTO ESSERE $p_N:\bar{S}^cN \longrightarrow N$.

NEL CASO SPECIFICO ABBIAMO CHE LA CORESTRIZIONE $p_NF:\bar{S}^cN \longrightarrow M$ E' UN MORFISMO DI MODULI GRADUATI LE CUI COMPONENTI SONO:

$$f_\infty = \sum_{n>0} f_n : \bigoplus_{n>0} M^{\odot n} \longrightarrow N$$

DUNQUE DARE UN MORFISMO L_∞ $f:(M,q) \dashrightarrow (N,p)$ E' COME DARE UNA COLLEZIONE DI MORFISMI $f_n: M^{\odot n} \longrightarrow N$ DI MODULI GRADUATI CHE SODDISFANO "QUALCHE CONDIZIONE DI COMMUTATIVITA'" CON LE STRUTTURE $L_\infty[1]$ DI M E N.

PER CAPIRE QUALI SIANO QUESTE CONDIZIONI DOBBIAMO RICORDARCI DELLA CONDIZIONE SUI DIFFERENZIALI DATA DA:

$$\begin{tikzcd}
\bar{S}^cM \arrow[r, "F"] \arrow[d, "Q"'] & \bar{S}^cN \arrow[d, "P"] \\
\bar{S}^cM \arrow[r, "F"] & \bar{S}^cN
\end{tikzcd}
\qquad PF = FQ$$

CONDIZIONE CHE DEVE ESSERE SODDISFATTA ANCHE DALLE CORESTRIZIONI:

$$\begin{tikzcd}
\bar{S}^cM \arrow[r, "F"] \arrow[d, "Q"'] & \bar{S}^cN \arrow[d, "P"] \arrow[dd, bend left, "p"] \\
\bar{S}^cM \arrow[r, "F"] \arrow[dr, bend right, "f_\infty"'] & \bar{S}^cN \arrow[d, "p_N"] \\
 & N
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{array}{c}
p_N P F = p_N F Q \\
\Updownarrow \\
pF = f_\infty Q
\end{array}$$

CIOE' $\forall n>0$ ABBIAMO CHE DEVE ESSERE SODDISFATTA LA CONDIZIONE:

$$\begin{tikzcd}
M^{\odot n} \arrow[r, "F_n^i"] \arrow[d, "Q_{n,i}"'] & \bigoplus_{i=1}^{n} N^{\odot i} \arrow[d, "P_i"] \\
\bigoplus_{i=1}^{n} M^{\odot n-i+1} \arrow[r, "f_{n-i+1}"'] & N
\end{tikzcd}
\qquad
\sum_{i=1}^{n} p_i F_n^i = \sum_{i=1}^{n} f_{n-i+1} Q_{n,i}$$

DUNQUE VALE LA SEGUENTE CARATTERIZZAZIONE:

TEOREMA: SIANO $(M,q),(N,p) \in L_\infty[1]$. UNA SEQUENZA DI MORFISMI $f_\infty = \sum f_n \in \mathrm{Hom}^0_R(\overline{S}^c M, M)$ DA UN MORFISMO L_∞ SE E SOLO SE

$$\sum_{i=1}^{n} \left(p_i F_n^i - f_{n-i+1} Q_{n,i} \right) = 0 \qquad (4)$$

DOVE $F_n^i : M^{\odot n} \longrightarrow N^{\odot i}$ SONO LE COMPONENTI DEL MORFISMO DI COALGEBRE $F : \overline{S}^c M \longrightarrow \overline{S}^c N$ ASSOCIATO A f_∞.

DIM: SEGUE DALLA COSTRUZIONE VISTA NELL'OSSERVAZIONE

$\square$ c.v.d.

FACCIAMO ORA QUALCHE SEMPLICE OSSERVAZIONE:

OSS: • È BEN DEFINITO IL SEGUENTE FUNTORE

$$\begin{tikzcd}
F: L_\infty[1] \arrow[r] & \mathrm{DGMod}(R) \\
(M,q) \arrow[r, mapsto] \arrow[d, dashed, "f"'] & (M,q_1) \arrow[d, "f_1"] \\
(N,p) \arrow[r, mapsto] & (N,p_1)
\end{tikzcd}$$

DOVE $f_1 : M \to N$ È LA PRIMA COMPONENTE DI f_∞, INFATTI LA CONDIZIONE (4) CI DA LA COMMUTATIVITÀ CON I DIFFERENZIALI PER $n=1$.

- SIA $f : (M,q) \longrightarrow (N,p)$ MORFISMO STRICT. ALLORA $\forall n>0$ SAPPIAMO CHE

$$\begin{tikzcd}
M^{\odot n} \arrow[r, "f^{\odot n}"] \arrow[d, "q_n"'] & N^{\odot n} \arrow[d, "p_n"] \\
M \arrow[r, "f"'] & N
\end{tikzcd} \qquad p_n f^{\odot n} = f q_n$$

DEFINIAMO UNA COLLEZIONE DI MORFISMI $f_n \in \mathrm{Hom}^0_R(M^{\odot n}, M)$ COME:

$$f_1 = f \quad ; \quad f_n = 0 \ \ \forall n > 1$$

$\Rightarrow f_\infty = \sum f_n = f$ SODDISFA LA CONDIZIONE (4), DUNQUE OGNI MORFISMO STRICT È L_∞-MORFISMO. VICEVERSA SE $f_\infty = f_1 + 0 + 0 + \cdots$ È MORFISMO L_∞ $\Rightarrow$ È MORFISMO STRICT.

- DATA $F : \overline{S}^c M \longrightarrow \overline{S}^c N \Rightarrow F_n^i = 0 \ \forall i > n$. INOLTRE IL CONTRIBUTO DI f_n IN F_n^i È SOLO PER $i=1$, CIOÈ $F_n^1 = f_n$.

- LO SCORSO SEMINARIO ABBIAMO VISTO CHE DATA $F : S^c M \longrightarrow S^c N$ MORFISMO DI COALGEBRE, QUESTO È INIETTIVO / SURIETTIVO / ISOMORFISMO SE E SOLO SE LO È $f_1 : M \longrightarrow N$ CIOÈ $F|_M$. IN ACCORDO CON QUESTO:

DEF: UN L_∞-MORFISMO È **INIETTIVO** / **SURIETTIVO** / **ISOMORFISMO** SE E SOLO SE LA SUA COMPONENTE LINEARE LO È.

TEOREMA DI TRASFERIMENTO OMOTOPICO

DEF: UN **DATO OMOTOPICO** E' IL DATO DI:

$$(M, q_1) \underset{g}{\overset{f}{\rightleftarrows}} (N, p_1) \circlearrowleft h$$

DOVE $(M, q_1), (N, p_1) \in DGMod(R)$, f, g SONO MORFISMI DI COMPLESSI E h E' UN OMOTOPIA TRA fg E Id_N, CIOE' $h \in Hom^{-1}_R(N,N)$ t.c. $fg - Id_N = p_1 h + h p_1$.

QUANDO SI COSTRUISCONO STRUTTURE LA CUI "BASE" E' UN MODULO DIFFERENZIALE GRADUATO, LA TIPICA DOMANDA E': QUALE TIPO DI STRUTTURA SU N POSSIAMO TRASFERIRE, TRAMITE IL DATO OMOTOPICO, SU M?

NEL NOSTRO CASO CI CHIEDIAMO SE LA STRUTTURA DI ALGEBRA L_∞ ASSOCIATA AD N POSSA ESSERE O MENO TRASFERITA SU M. POICHE' LA RISPOSTA SARA' AFFERMATIVA, CI CHIEDEREMO QUALI SIANO LE CONDIZIONI DA PORRE SU UN MORFISMO DI COMPLESSI $f: (M, q_1) \longrightarrow (N, p_1)$ AFFINCHE' LA STRUTTURA DI N POSSA ESSERE SPOSTATA SU M, CIOE' CI CHIEDEREMO:

$$\begin{tikzcd}
F: L_\infty[1] \arrow[rr] & & DGMod(R) \\
(M, ?) \arrow[d, dashed, "?"'] & & (M, q_1) \arrow[ll, mapsto] \arrow[d, "f"] \\
(N, p) \arrow[rr, mapsto] & & (N, p_1)
\end{tikzcd}$$

CHE TIPO DI CONDIZIONI DEVE SODDISFARE f AFFINCHE' SIA BEN DEFINITA UNA STRUTTURA $L_\infty[1]$ SU M E UN MORFISMO $f_\infty: (M, q) \dashrightarrow (N, p)$ LA CUI PARTE LINEARE SIA IL DATO DI PARTENZA?

TEOREMA: SIA $(M, q_1) \underset{g_1}{\overset{f_1}{\rightleftarrows}} (N, p_1) \circlearrowleft h$ UN DATO OMOTOPICO E $p \in Hom^1_R(\overline{S}^c N, N)$ STRUTTURA $L_\infty[1]$ SU N. ALLORA ESISTE $q \in Hom^1_R(\overline{S}^c M, M)$ STRUTTURA $L_\infty[1]$ SU M E $f: (M, q) \dashrightarrow (N, p)$ MORFISMO L_∞ DI COMPONENTE LINEARE f_1.

COSTRUZIONE MORFISMI: PER INDUZIONE SU $n > 0$. VOGLIAMO COSTRUIRE DELLE MAPPE:

$$q_n \in Hom^1_R(M^{\odot n}, M) \quad ; \quad f_n \in Hom^0_R(M^{\odot n}, N)$$

CHE SODDISFINO LE CONDIZIONI:

$$① \sum_{i=1}^{n} q_{n-i+1} Q_{n,i} = 0 \qquad ② \sum_{i=1}^{n} \left(p_i F_n^i - f_{n-i+1} Q_{n,i} \right) = 0$$

DEFINIAMO DUNQUE:

$$q_n : M^{\odot n} \xrightarrow{F_n^i} \bigoplus_{i=2}^{n} N^{\odot i} \xrightarrow{p_i} N \xrightarrow{g_1} M$$

$$f_n : M^{\odot n} \xrightarrow{F_n^i} \bigoplus_{i=2}^{n} N^{\odot i} \xrightarrow{p_i} N \xrightarrow{h} N$$

CON (MOLTI) CONTI SI MOSTRA CHE SODDISFANO ① E ② □ c.v.d.

A QUESTO PUNTO CI CHIEDIAMO: CHE CONDIZIONI DEVE SODDISFARE UN MORFISMO DI COMPLESSI $f:(M,q_1)\longrightarrow(N,p_1)$ AFFINCHÈ SI RIESCA A COSTRUIRE UN DATO OMOTOPICO (E QUINDI A SOLLEVARE STRUTTURE)?

<u>LEMMA</u>: SIA $R=\mathbb{K}$ CAMPO (A CARATTERISTICA ZERO). SIA $f:(M,q_1)\longrightarrow(N,p_1)$ QUASI-ISO INIETTIVO. ALLORA ESISTONO $g:(N,p_1)\longrightarrow(M,q_1)$ E UN'OMOTOPIA h TRA fg E Id_N CHE COSTITUISCONO IL SEGUENTE DATO OMOTOPICO:

$$\begin{tikzcd}(M,q_1) \arrow[r, shift left, "f"] & (N,p_1) \arrow[l, shift left, "g"] \arrow[loop right, "h"]\end{tikzcd}$$

CON $fg-Id_N=p_1h+hp_1$. INOLTRE $gf=Id_M$ E $hf=gh=h^2=0$, CIOE' IL DATO OMOTOPICO E' UNA CONTRAZIONE.

$\hookrightarrow \begin{cases} gf_n=0 & \forall n>1 \\ q=gpf \end{cases}$

<u>COROLLARIO</u>: DATO $f:(M,q_1)\longrightarrow(N,p_1)$ QUASI-ISOMORFISMO INIETTIVO, OGNI STRUTTURA $L_\infty[1]$ SU N SI SOLLEVA AD UNA STRUTTURA SU M. INOLTRE ESISTE UN UNICO MORFISMO L_∞ TRA M E N LA CUI COMPONENTE LINEARE SIA f.