DERIVAZIONI E DIFFERENZIALI

Definizione

Una mappa $D: A \longrightarrow M$ con A anello e M un A-modulo si dice __derivazione__ da A ad M se

- $D(a+b) = D(a) + D(b)$
- $D(ab) = b\,D(a) + a\,D(b)$

L'insieme delle derivazioni si indica con $Der(A,M)$ ed è un A-modulo.
Nel caso in cui A sia una K-algebra tramite l'omomorfismo $f: K \longrightarrow A$, diremo che

$$D: A \longrightarrow M \text{ è una } K\text{-derivazione se } D \circ f = 0 .$$

L'insieme di K-derivazioni si indica con $Der_K(A,M)$
(è ovviamente un sottomodulo di $Der(A,M)$)

Poiché $D(1_A) = 0$, e visto che ogni anello è una $\mathbb{Z}$-algebra $\left(n a = \overbrace{a+a+\dots+a}^{n \text{ volte}}\right)$, avremo che $Der(A,M) = Der_{\mathbb{Z}}(A,M)$

Nel caso in cui $M = A$ indicheremo $Der_K(A)$.
In quest'ultimo caso possiamo dare una struttura di algebra di Lie alle derivazioni con $[D,D'] = DD' - D'D$

OSSERVAZIONE

$\forall a \in A \quad D(a^n) = n a^{n-1} Da$

Vediamo adesso due costruzioni

1) K anello, B K-algebra ed N ideale di B con $N^2 = 0$. Sia $A = B/_N$.
Ora N è anche un A-modulo (poiché $N^2 = 0$)
Diremo che B è estensione della K-algebra A con l'A-modulo N.
Cioè, nel linguaggio delle sequenze esatte

$$0 \longrightarrow N \xrightarrow{i} B \xrightarrow{f} A \longrightarrow 0$$

Diremo che B si spezza se $\exists\, \varphi: A \longrightarrow B$ tale che $f\varphi = 1_A$. Infatti da ciò abbiamo che $B = A \oplus N$ come K-moduli.

2) Al contrario, prendiamo una K-algebra A e un A-modulo N e diamo una struttura di algebra su $A \oplus N$ prendendo

$$(a,n) * (a',n') = (aa', an' + a'n) \quad \text{come prodotto}$$

Indicheremo con $A * N$ questa algebra. Allora ovviamente vale che

$$0 \rightarrow N \rightarrow A*N \rightarrow A \rightarrow 0 \quad \text{è esatta e si spezza.}$$

Prendiamo ora in generale un diagramma commutativo di K-algebre

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "f"] & A \\ & C \arrow[u, "g"] \arrow[ul, dotted, "h"] \end{tikzcd}$$

Fissata f, diremo che h è un sollevamento di g. (cioè se $fh = g$)
Chiamato $N = \operatorname{Ker} f$, allora

OSSERVAZIONE

Dati due sollevamenti $h, h' : C \to B$ di g, allora $h - h'$ è una K-derivazione da C ad N

dimostrazione

Poiché $f(h-h') = g - g = 0 \Rightarrow (h-h')(C) \subset N$.
Inoltre è ovviamente lineare (lo sono h e h')
Ora vediamo che

$h - h' =: D$ è tale che $D(ab) = bD(a) + aD(b)$

Infatti

$$(h-h')(ab) = h(a)h(b) - h'(a)h'(b)$$

Ora però B è un C-modulo. Infatti poiché $N^2 = 0$, N è un $f(B)$-modulo, e inoltre $g(C) \subset f(B)$. Quindi avrò per definizione che $ab = h(a)b$ con $\begin{matrix} a \in C \\ b \in N \end{matrix}$

Ovviamente se definisco $ab = h'(a)b$ è uguale poiché $h - h' \in N$ e $b \in N \Rightarrow (h-h')(a)b = 0$
Quindi possiamo concludere

$$(h-h')(ab) = h(a)h(b) - h'(a)h(b) + h'(a)h(b) - h'(a)h'(b) =$$

$$= h(b)(h-h')(a) + h'(a)(h-h')(b) = b(h-h')(a) + a(h-h')(b).$$

Vale quindi Leibniz.
Inoltre

$$(h-h')(k) = k(h-h')(1) = 0 \quad \text{poiché } h-h' \text{ derivazione}$$

(possiamo tirar fuori k poiché h è un omomorfismo di algebre)

Si può vedere facilmente che

$D \in \operatorname{Der}_K(C, N)$, allora $h + D$ è un sollevamento di g a B.

Vediamo ora la prima costruzione importante.
Dato cioè un anello K e una K-algebra, e sia $\mathcal{M}_A$ la categoria degli A-moduli.
Avremo ovviamente un funtore covariante

$$M \longrightarrow \operatorname{Der}_K(A, M)$$

Teorema

Il funtore $\mathrm{Der}_K(A,-)$ è rappresentabile, cioè $\exists M_0 \in \mathcal{M}_A$, $d \in \mathrm{Der}_K(A, M_0)$ tali che

$\forall M \in \mathcal{M}_A$, $\forall D \in \mathrm{Der}_K(A,M)$ $\quad \exists!\, f : M_0 \to M$ A-lineare tale che il diagramma commuti:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "D"] \arrow[d, "d"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & M \\ M_0 \arrow[ur, dotted, "\exists! f"'] & \end{tikzcd}$$

<u>dimostrazione</u> / <u>costruzione</u>

Consideriamo $\mu : A \otimes_K A \longrightarrow A$ con $\mu(x \otimes y) = xy$.
Ora μ è omomorfismo di K-algebre; poniamo quindi $I = \operatorname{Ker}\mu$

$$\Omega_{A/K} = I/I^2$$
$$B = A\otimes_K A/I^2$$

Ovviamente poiché $\mu(I^2) = 0 \Rightarrow \tilde{\mu} : B = A\otimes_K A/I^2 \longrightarrow A$ è ben definita
Avrò inoltre

$$0 \longrightarrow \Omega_{A/K} \longrightarrow B \xrightarrow{\tilde{\mu}} A \longrightarrow 0$$ è esatta (cioè B è estensione di K-algebre di A attraverso $\Omega_{A/K}$)

Vediamo che questa estensione si spezza, prendendo

$$\lambda_1 : A \longrightarrow B, \quad a \longmapsto a \otimes 1 \bmod I^2 \qquad \text{e} \qquad \lambda_2 : A \longrightarrow B, \quad a \longmapsto 1 \otimes a \bmod I^2$$

avrò ben due sollevamenti dell'identità su A.

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "\tilde{\mu}"] & A \\ & A \arrow[u, "id"'] \arrow[ul, bend right, "\lambda_1"'] \arrow[ul, bend left, "\lambda_2"] \end{tikzcd}$$

Visto l'osservazione di prima $d = \lambda_2 - \lambda_1$ è una derivazione da A a $\Omega_{A/K}$
(Notiamo che non sappiamo se $I^2 = 0$ ma sappiamo che $(I/I^2)^2 = 0$

I candidati ora sono $M_0 = \Omega_{A/K}$
$d = d$

Prendiamo un generico $M \in \mathcal{M}_A$ e una $D \in \mathrm{Der}_K(A, M)$.
Definiamo ora per comodità $\varphi : A \otimes_K A \to A * M$ con $\varphi(x \otimes y) = (xy, xDy)$
Avrò che φ è omomorfismo di K-algebre e

$$\mu\Big(\sum_i x_i \otimes y_i\Big) = 0 \Rightarrow \varphi\Big(\sum_i x_i \otimes y_i\Big) = \Big(0, \sum_i x_i D y_i\Big)$$

Quindi $\varphi(I) \subset 0 \oplus M$. Ora poiché $(0 \oplus M)^2 = 0$ per le definizioni date di algebra su $A * M$, $\varphi(I^2) = 0$

$$\Rightarrow \exists f = \tilde{\varphi} : I/_{I^2} = \Omega_{A/k} \longrightarrow M .$$

Verifichiamo che sollevi la D.

$$\forall a \in A \quad f(da) = f(1 \otimes a - a \otimes 1 \mod I^2) = \varphi(1 \otimes a) - \varphi(a \otimes 1) =$$

$$= (a, Da) - (a, aD1) = (0, Da) = Da$$

Ora in $\Omega_{A/k}$ c'è una struttura di A-modulo, si definisce infatti preso $a \in A$, $b \in \Omega_{A/k}$

$$ab = (a \otimes 1)\, b \quad (\text{o } 1 \otimes a \text{, tanto danno lo stesso risultato})$$

Quindi preso $\xi = \sum_i x_i \otimes y_i \mod I^2 \Rightarrow a\xi = \sum_i a x_i \otimes y_i \mod I^2$ $(\text{o } x_i \otimes a y_i)$

$$\Rightarrow f(a\xi) = \sum a x_i D y_i = a f(\xi) \quad \text{quindi } f \text{ è } A\text{-lineare}$$

(Notiamo che se avessimo preso $1 \otimes a$ avrei avuto $\sum_i x_i \otimes a y_i \to \sum_i x_i D a y_i \overset{D}{=} \sum_i a x_i y_i$)

Abbiamo ora costruito il nostro modulo rappresentante $\Omega_{A/k}$. Chi è?

Corollario 1

$\Omega_{A/k}$ è generato come A-modulo da $\{da \mid a \in A\}$.

Infatti prendiamo $a \otimes a' = (a \otimes 1)(1 \otimes a' - a' \otimes 1) + a a' \otimes 1$ in generale.

Ora quindi

$$\omega = \sum_i x_i \otimes y_i \in I \Rightarrow \sum_i x_i y_i = 0$$

Se prendo ora $\omega \mod I^2 = \left(\sum_i (x_i \otimes 1)(d y_i) + \sum_i (x_i y_i \otimes 1) \right) \mod I^2 =$

$$= \sum_i x_i \, d y_i + \mod I^2$$

Quindi $\Omega_{A/k}$ è generato da $\{da \mid a \in A\}$ e da qui avrò che, presa $g : \Omega_{A/k} \longrightarrow M$ tale che $D = g \circ d$, ~~poi~~ basta verificare che $g(dx) = f(dx) \quad \forall x \in A$

(ma questo è vero perché sono entrambi D)

Quindi f è unica. Da questo teorema emerge subito che

OSSERVAZIONE

$$\mathrm{Der}_k(A, M) \cong \mathrm{Hom}_A(\Omega_{A/k}, M)$$

DEFINIZIONE

L'A-modulo $\Omega_{A/K}$ ottenuto è chiamato MODULO DEI DIFFERENZIALI DI KÄHLER. L'elemento da è chiamato differenziale di A.

Quindi consideriamo $\Omega_{A/K}$ come il generato su A dei differenziali di A

DEFINIZIONE

Sia A una K-algebra, allora diremo che A è 0-smooth su K se

$\forall C$ K-algebra
$\forall N \subset C$ ideale tale che $N^2=0$
$\forall f: A \longrightarrow C/_N$ morfismo di K-algebre

$\Rightarrow \exists g$ tale che il diagramma commuti (con g morfismo di K-algebre)

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[dr, dotted, "g"'] & C/_N \\ & C \arrow[u, "\pi_N"'] \end{tikzcd}$$

Se ne esiste al più una, diremo che A è 0-unramified su K
Se esiste ed è unica, diremo che A è 0-étale.

OSSERVAZIONE

A è 0-unramified se e solo se $\Omega_{A/K}=0$

dimostrazione

($\Rightarrow$)
Poiché $d=\lambda_1-\lambda_2$, con λ_1, λ_2 sollevamenti dell'unità e A 0-unramified $\Rightarrow \lambda_1=\lambda_2 \Rightarrow d=0$
$\Rightarrow \Omega_{A/K}=0$

($\Leftarrow$)
Siano u, v sollevamenti di f, $\Rightarrow u-v$ è una derivazione $\Rightarrow u-v=fd$ con $f: \underline{0} \rightarrow C$
$\Rightarrow u-v=0 \Rightarrow u=v$.

Teorema (prima sequenza fondamentale esatta)

Sia $K \xrightarrow{f} A \xrightarrow{g} B$ morfismi di anelli, allora esiste una sequenza esatta di B-moduli

$$\Omega_{A/K}\otimes_A B \xrightarrow{\alpha} \Omega_{B/K} \xrightarrow{\beta} \Omega_{B/A} \longrightarrow 0$$

con $\alpha(d_{A/K}a \otimes b) = b\, d_{B/K}\, g(a)$ e $\beta(d_{B/K}b) = d_{B/A}b$

Se inoltre B è 0-smooth su A, allora avremo una sequenza esatta che si spezza

$$0 \longrightarrow \Omega_{A/K}\otimes_A B \xrightarrow{\alpha} \Omega_{B/K} \xrightarrow{\beta} \Omega_{B/A} \longrightarrow 0$$

dimostrazione

Sappiamo che "(essendo $\mathrm{Hom}(A,-)$ un funtore controvariante esatto a destra)" la sequenza $N' \rightarrow N \rightarrow N'' \rightarrow 0$ è esatta se e solo se $0 \rightarrow \mathrm{Hom} \rightarrow \mathrm{Hom} \rightarrow \mathrm{Hom}$ è esatta. $\forall$

Ora $\forall T$ B-modulo avrò

$$0 \to \mathrm{Hom}_B(\Omega_{B/A}, T) \xrightarrow{\beta^*} \mathrm{Hom}_B(\Omega_{B/K}, T) \xrightarrow{\alpha^*} \mathrm{Hom}_B(\Omega_{A/K} \otimes_A B, T)$$

$$\begin{array}{ccccc} \mathrm{Hom}_B(\Omega_{B/A}, T) & & \mathrm{Hom}_B(\Omega_{B/K}, T) & & \mathrm{Hom}_B(\Omega_{A/K} \otimes_A B, T) \\ \wr\wr & & \wr\wr & & \wr\wr \ (*) \\ \mathrm{Der}_A(B,T) & & \mathrm{Der}_K(B,T) & & \mathrm{Hom}_A(\Omega_{A/K}, T) \\ & & & & \wr\wr \\ & & & & \mathrm{Der}_K(A,T) \end{array}$$

(*) Sia $\varphi: \Omega_{A/K} \otimes_A B \longrightarrow T$, posso definire $\tilde{\varphi}: \Omega_{A/K} \longrightarrow T$ come

$$\tilde{\varphi}(d_{A/K} a) = \varphi(d_{A/K} a \otimes_A 1_B)$$ (infatti φ è un B-omomorfismo quindi posso tirare fuori)

E viceversa.

Ora sia $D \in \mathrm{Der}_A(B,T) \Rightarrow \beta^*(D) = D \in \mathrm{Der}_K(B,T)$ (ovviamente una derivazione su A lo è anche su K)

Inoltre $\alpha^*(D)$ con $D \in \mathrm{Der}_K(B,T)$ sarà

$$\alpha^*(D) = D \circ g \in \mathrm{Der}_K(A,T).$$

Quindi

$$\alpha^*(D) = 0 \Rightarrow D \circ g = 0 \Rightarrow D \text{ è una derivazione su } A \Rightarrow \text{è esatta}.$$

Vediamo la seconda parte; Supponiamo B 0-smooth su A, e prendiamo una generica T A algebra ~~B-modulo~~ e una Derivazione $D \in \mathrm{Der}_K(A,T)$.

Allora

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "id"] & B \\ A \arrow[u, "g"] \arrow[r, "\varphi"] & B * T \arrow[u] \end{tikzcd}$$ con $\varphi(a) = (ga, Da)$

è tale che $(0,T)^2 = 0 \Rightarrow \exists h: B \to B * T$ A-lineare.

Chiamiamo $h(b) = (b, D'b)$ (deve essere b perché è commutativo)

Ora $D' \in \mathrm{Der}(B,T)$, infatti è lineare e

$$h(b_1b_2) = (b_1b_2, D'(b_1b_2)) = h(b_1)h(b_2) = (b_1, D'b_1) * (b_2, D'b_2) = (b_1b_2, b_2D'b_1 + b_1D'b_2)$$

$$\Rightarrow D'(b_1b_2) = b_2 D'b_1 + b_2 D'b_2.$$

Ora

$$h \circ g = \varphi \Rightarrow h(g(a)) = \varphi(a) \Rightarrow (g(a), D'g(a)) = (g(a), D(a)) \Rightarrow D(a) = (D' \circ g)(a)$$

Per la rappresentabilità del nostro funtore

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "D'"] \arrow[d, "d_{B/K}"] & T \\ \Omega_{B/K} \arrow[ur, dashed, "\exists \alpha'"'] & \end{tikzcd}$$ $\alpha' d_{B/K} = D'$

Ora prendiamo $T = \Omega_{A/K} \otimes_A B$

$$D(a) = d_{A/K}(a) \otimes_A 1$$

Ora $$\alpha'(\alpha(d_{A/K} a \otimes b)) = \alpha'(b\, d_{B/K} g(a)) = b\, \alpha'(d_{B/K} g)(a) = b\, D'g(a) = b\, D(a) =$$

$$= b(d_{A/K} a \otimes 1) = d_{A/K} a \otimes b = 1_{\Omega_{A/K} \otimes B}(d_{A/K} a \otimes b)$$

Studiamo ora il caso in cui g sia suriettiva.

<u>Teorema</u> (Seconda ~~forma~~ sequenza fondamentale esatta)

Sia $K \xrightarrow{f} A \xrightarrow{g} B$ omomorfismi di anelli con g suriettiva. Allora avremo la sequenza esatta

$$m/m^2 \xrightarrow{\delta} \Omega_{A/K} \otimes_A B \longrightarrow \Omega_{B/K} \longrightarrow 0$$

con δ B-lineare tale che $\delta(x \bmod m^2) = d_{A/K}\, x \otimes 1$

Se B è 0-smooth su K allora

$$0 \longrightarrow m/m^2 \longrightarrow \Omega_{A/K} \otimes_A B \longrightarrow \Omega_{B/K} \longrightarrow 0$$

è esatta e si spezza.

<u>dimostrazione</u>

Ripetiamo il procedimento per il teorema precedente, passiamo agli omomorfismi. Quindi sia T arbitrario B-modulo, allora vogliamo dimostrare che

$$0 \longrightarrow \mathrm{Der}_K(B,T) \longrightarrow \mathrm{Der}_K(A,T) \xrightarrow{\delta^*} \mathrm{Hom}_B(m/m^2, T)$$

è esatta. Verifichiamo ovviamente solo per δ^*.

Sia $D \in \mathrm{Der}_K(A,T) \Rightarrow \delta^*(D) = 0 \Rightarrow$ Per chiarificare

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "D"] \arrow[d, "d_{A/K}"'] & T & \\
\Omega_{A/K} \arrow[ur, dotted, "\gamma"] & & \\
& \Omega_{A/K} \otimes_A B \arrow[ul] \arrow[uu, "\gamma'"] & m/m^2 \arrow[l, "\delta"'] \arrow[uul, dashed]
\end{tikzcd}$$

Ora $D = \gamma \circ d_{A/K}$, con γ tale che $\gamma\pi = \gamma'$.

Ora $\delta^*(D) = 0$ ~~$\delta(\gamma') = 0 \Rightarrow (\delta \circ \gamma \circ \pi)(m) = 0$~~

$$\Rightarrow \gamma' \circ \delta = 0 \Rightarrow \gamma\pi\delta(m) = 0 \Rightarrow \gamma\pi(d_{A/K}\, m \otimes 1) = 0$$

$\Rightarrow (\gamma \circ d_{A/K})(m) = 0 \Rightarrow D(m) = 0$ Quindi D può essere definita su A/m.

Quindi $\exists\, \tilde{D} : A/m \longrightarrow T : \alpha^*(\tilde{D}) = D$ (ma $A/m = B$)

$\Rightarrow$ è esatta. $\quad (\alpha^*(\tilde{D}) = \tilde{D} \circ g)$

Prendiamo B 0-smooth su K, allora sia il diagramma

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & m/m^2 \arrow[r] & A/m^2 \arrow[r, "g"] & B \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & m/m^2 \arrow[r] & A/m^2 \arrow[r] & B \arrow[r] \arrow[u, "id_B"'] \arrow[ul, dotted, "s"] & 0
\end{tikzcd}$$

$\exists\, s : gs = id_B$ morfismo di K-alg.

Notiamo che $sg: A/_{m^2} \longrightarrow A/_{m^2}$ tale che $\cdot\ sg(m)=0 \quad m\in m$

$\cdot\ g(1-sg) =$

$= g-(gs)g = g-g=0$

Quindi nel diagramma di k-algebre

$$\begin{tikzcd} A/_{m^2} \arrow[r, "g"] & A/_{m} \cong B \\ & A/_{m^2} \arrow[u, "g"] \arrow[ul, bend right, "id_B"'] \arrow[ul, bend left, "sg"] \end{tikzcd}$$

1 e sg sono due sollevamenti di g

$\Rightarrow 1-sg$ è derivazione

Quindi chiamiamo $D = 1-sg: A/_{m^2} \longrightarrow m/_{m^2}$ (infatti $g(1-sg)=0$)

Vogliamo verificare ora che, dato $T \in Mod_A$ generico, $\psi \in Hom(m/_{m^2}, T)$

$\cancel{0 \to Der_k(B,T) \to Der_k(A,T) \to Hom_B(m/_{m^2},T) \to 0}$

è esatta $\quad \delta^*(D') = \psi$ con $D'(a) = (\psi D \pi_{m^2})(a)$

Ma $\delta^*(D')^{(m)} = D'(m) = (\psi D \pi_{m^2})(m) = \psi(1-sg)(m+m^2) = \psi(m)$

Quindi δ^* è suriettiva. Questo ci dice che, prendendo $T = m/_{m^2}$ avrò che

$$\delta^*: Hom_B(\Omega_{A/k} \otimes_A B, m/_{m^2}) \longrightarrow Hom_B(m/_{m^2}, m/_{m^2}) \quad \text{è suriettiva}$$

$\Rightarrow \exists f: \Omega_{A/k} \otimes_A B \longrightarrow m/_{m^2}$ tale che $\delta^*(f) = f\circ\delta = 1_{m/_{m^2}}$

$\Rightarrow \delta$ è iniettiva quindi è esatta (e si spezza)

Vediamo ora l'ultima osservazione che ci permette di chiudere il Teorema

OSSERVAZIONE

Sia $0 \to A \xrightarrow{d_A} B \xrightarrow{d_B} C \to 0$ sequenza esatta corta in una categoria abeliana
(consideriamo R-moduli per semplicità)

Allora

1) $\exists f: C \to B$ ($\in Hom_R(C,B)$) tale che $d_B f = 1_C$ $\Rightarrow B \cong A \oplus C$ (quindi si spezza)

2) $\exists g: B \to A$ ($\in Hom_R(B,A)$) tale che $g d_A = 1_A$ $\Rightarrow B \cong A \oplus C$ (quindi si spezza)

dimostrazione

1) Sia $\tau: A\oplus C \to B$, $(a,c) \longmapsto d_A a + fc$, allora $\cdot\ \tau \in Hom_R(A\oplus C, B)$

$\cdot\ \tau$ iniettivo, infatti

$\tau(a,c)=0 \Rightarrow d_A a = -fc \Rightarrow d_B d_A a = -d_B f c \Rightarrow c=0 \Rightarrow d_A a=0 \Rightarrow a=0$

Inoltre I suriettivo, infatti poiché $b = (1 - fd_B)(b) + fd_B(b)$, allora dato $b \in B$ prendo

$$c = d_B(b) \quad \text{e poiché} \quad d_B(1 - fd_B)(b) = 0 \quad \text{ed è esatta}$$

$$\Rightarrow \exists \tilde{a} : d_A \tilde{a} = (1 - fd_B)(b)$$

Quindi prendo

$$I(\tilde{a}, d_B b) = d_A \tilde{a} + fd_B b = (1 - fd_B)(b) + fd_B(b) = b$$

∎

2) Sia $\sigma : B \longrightarrow A \oplus C$ ora $\sigma \in Hom_R(B, A \oplus C)$

$\quad b \longmapsto gb \oplus d_B b$

Inoltre

σ iniettivo

$$\sigma(b) = 0 \Rightarrow gb \oplus d_B b = 0 \Rightarrow \underset{\text{quindi poiché esatta } \exists a : b = d_A a}{d_B b = 0} \Rightarrow \overset{1_A}{g d_A} a = 0 \Rightarrow a = 0$$

Quindi $b = d_A a = 0$

σ suriettivo

Siano $a \oplus c$, allora $\exists b_a : g b_a = a$, $\exists b_c : d_B b_c = c$ (infatti d_B è suriettiva poiché esatta e visto che $g d_A = 1_A \Rightarrow g$ suriettivo)

Prendo ora $\tilde{b} = d_A g(b_a - b_c) + b_c \in B$

$$\Rightarrow \sigma(\tilde{b}) = (g\tilde{b}, d_B \tilde{b}) = (\overset{1_A}{\widetilde{g d_A}} g(b_a - b_c) + g b_c, d_B d_A g(b_a - b_c) + d_B b_c) =$$

$$= (g b_a, d_B b_c) = (a, c)$$

∎