INTRODUZIONE

L'OBIETTIVO DI QUESTO SEMINARIO È QUELLO DI FORNIRE LE PRINCIPALI NOZIONI DELLA TEORIA DI BASE DELLE COALGEBRE IL CUI LINGUAGGIO SARÀ NECESSARIO PER LO STUDIO DELLE ALGEBRE L_∞.

UN PO' DI ALGEBRA MULTILINEARE

ANDREMO A DEFINIRE ALCUNI NOTI COSTRUTTI ALGEBRICI CHE SARANNO ALLA BASE DEL LINGUAGGIO DELLE COALGEBRE. SIA R ANELLO COMMUTATIVO, INDICHEREMO CON **GMod(R)** LA CATEGORIA DEGLI R-MODULI GRADUATI I CUI OGGETTI SONO DELLA FORMA $M^\cdot = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} M^n$ CON M^n R-MODULO $\forall n \in \mathbb{N}$ E I CUI MORFISMI SONO $f = \{f^n : M^n \to N^n\}$.
CON $Hom_R^k(M,N)$ INDICHEREMO I MORFISMI R-LINEARI DELLA FORMA $f = \{f^n : M^n \to N^{n+k}\}$ E CON **coCh(R)** LA CATEGORIA I CUI OGGETTI SONO LE COPPIE (M,d) CON $M \in GMod(R)$ E $d \in Hom_R^1(M,M)$ CON $d^2=0$ E I CUI MORFISMI SONO QUELLI DI MODULI GRADUATI CHE COMMUTANO CON I DIFFERENZIALI.

<u>DEF</u>: SIANO $M,N \in GMod(R)$. IL **PRODOTTO TENSORIALE** È UN R-MODULO GRADUATO $(M\otimes N)$ t.c. IN GRADO n $(M\otimes N)^n = \bigoplus_{i+j=n} M^i \otimes N^j$. INDICHEREMO CON $\overline{T}^c M = \bigoplus_{n>0} M^{\otimes n} = \bigoplus_{n>0} \underbrace{M\otimes\cdots\otimes M}_{n\text{-volte}}$

<u>OSS</u>: POSSIAMO SUPPORRE CHE $N,M \in coCh(R)$ E CHIEDERCI QUALE SIA IL MODO PIÙ NATURALE DI DEFINIRE UN DIFFERENZIALE SU $M\otimes N$. SIA $d : (M\otimes N)^i \longrightarrow (M\otimes N)^{i+1}$ DEFINITO DA:

$$d(m\otimes n) = d_M(m)\otimes n + (-1)^{\overline{m}}\, m\otimes d_N(n) \qquad M^i\otimes N^j \longrightarrow M^{i+1}\otimes N^j \oplus M^i\otimes N^{j+1}$$

QUESTO È BEN DEFINITO E SODDISFA LA CONDIZIONE $d^2=0$. QUESTA DEFINIZIONE È NATURALMENTE ESTENDIBILE ALL'n-ESIMO PRODOTTO TENSORIALE, DUNQUE POSSIAMO DEFINIRE UN FUNTORE:

$$\begin{tikzcd}
-^{\otimes n}: & coCh(R) \arrow[r] & coCh(R) \\
& (M,d) \arrow[r, mapsto] \arrow[d, "f"'] & (M^{\otimes n}, d^{(n)}) \arrow[d, "f^{\otimes n}"] \\
& (N,p) \arrow[r, mapsto] & (N^{\otimes n}, p^{(n)})
\end{tikzcd}$$

DOVE $f^{\otimes n}(m_1\otimes\cdots\otimes m_n) = f(m_1)\otimes\cdots\otimes f(m_n)$. ALLO STESSO MODO POSSIAMO COSTRUIRE IL SEGUENTE FUNTORE CHE CHIAMEREMO **FUNTORE TENSORIALE RIDOTTO**

$$\begin{tikzcd}
\overline{T}^c(-): & coCh(R) \arrow[r] & coCh(R) \\
& (M,d) \arrow[r, mapsto] \arrow[d, "f"'] & (\overline{T}^c M, \overline{d}) \arrow[d, "\overline{f}"] \\
& (N,p) \arrow[r, mapsto] & (\overline{T}^c N, \overline{p})
\end{tikzcd}$$

DOVE $\overline{f} = \sum_{n>0} f^{\otimes n}$ E $\overline{d} = \sum_{n>0} d^{(n)}$

DATO $M \in GMod(R)$, C'È UN'AZIONE NATURALE DEL GRUPPO SIMMETRICO Σ_n SULL' R-MODULO GRADUATO $M^{\otimes n}$ CHE INDICHEREMO CON:

DEF: LA **MAPPA TWIST** È $Tw_n : M^{\otimes n} \times \Sigma_n \longrightarrow M^{\otimes n}$ DEFINITA $\forall m_1, \dots, m_n$ OMOGENEI E $\forall \sigma \in \Sigma_n$ COME: $Tw_n(m_1 \otimes \dots \otimes m_n, \sigma) = \varepsilon(\sigma)\, m_{\sigma(1)} \otimes \dots \otimes m_{\sigma(n)}$

DOVE $\varepsilon(\sigma) \in \{\pm 1\}$ È DETTO **SEGNO DI KOSZUL** ED È LA SIGNATURA DELLA RESTRIZIONE DI σ AL SOTTOINSIEME DI INDICI $\{i : \overline{v_i} \text{ È DISPARI}\}$.

DEF: SIA $M \in GMod(R)$. L'**n-ESIMA POTENZA SIMMETRICA** È UN R-MODULO GRADUATO DEFINITO COME:

$$M^{\odot n} = M^{\otimes n} / I_n \qquad \text{CON } I_n = \{ m_1 \otimes \dots \otimes m_n - \varepsilon(\sigma)\, m_{\sigma(1)} \otimes \dots \otimes m_{\sigma(n)} \}.$$

INDICHEREMO CON $\overline{S}^c M = \bigoplus_{n > 0} M^{\odot n}$. UNA MAPPA MULTILINEARE $f : M^{\times n} \longrightarrow M$ È DETTA **SIMMETRICA** SE E SOLO SE FATTORIZZA PER $M^{\odot n}$, i.e. SE $f(m_{\sigma(1)}, \dots, m_{\sigma(n)}) = \varepsilon(\sigma) f(m_1, \dots, m_n)$

OSS: ANALOGAMENTE A QUANTO VISTO PER IL PRODOTTO TENSORIALE, POSSIAMO DEFINIRE I SEGUENTI FUNTORI, IL SECONDO LO CHIAMEREMO **FUNTORE SIMMETRICO RIDOTTO**:

$$\begin{array}{ccc} \_^{\odot n} : coCh(R) & \longrightarrow & coCh(R) \\ (M, d) & \longmapsto & (M^{\odot n}, d^{(n)}) \\ f \downarrow & & \downarrow f^{\odot n} \\ (N, p) & \longmapsto & (N^{\odot n}, p^{(n)}) \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \overline{S}^c(-) : coCh(R) & \longrightarrow & coCh(R) \\ (M, d) & \longmapsto & (\overline{S}^c M, \overline{d}) \\ f \downarrow & & \downarrow \overline{f} \\ (N, p) & \longmapsto & (\overline{S}^c N, \overline{p}) \end{array}$$

DOVE $f^{\odot n}(m_1 \odot \dots \odot m_n) = f(m_1) \odot \dots \odot f(m_n)$, $\overline{f} = \sum_{n > 0} f^{\odot n}$, $\overline{d} = \sum_{n > 0} d^{(n)}$ CON

$$d^{(n)}(m_1 \odot \dots \odot m_n) = \sum_{\sigma \in S(1, n-1)} \varepsilon(\sigma)\, d(m_{\sigma(1)}) \odot m_{\sigma(2)} \odot \dots \odot m_{\sigma(n)}$$

COALGEBRE GRADUATE

PER DARE LA DEFINIZIONE DI COALGEBRA E DI TUTTE LE SUE PROPRIETÀ, BASTA DUALIZZARE IN SENSO CATEGORIALE (CIOÈ INVERTIRE LE FRECCE) LA NOZIONE DI ALGEBRA.

SIA R ANELLO COMMUTATIVO CON $\mathbb{Q} \subseteq R$ ← è un'ipotesi necessaria in quanto avremo bisogno di fare quozienti

DEF: UNA **COALGEBRA GRADUATA (COASSOCIATIVA)** È UNA COPPIA (C, Δ) DOVE $C \in GMod(R)$ E $\Delta : C \longrightarrow C \otimes C$ È UN MORFISMO DI R-MODULI GRADUATI DETTO **COPRODOTTO** CHE SODDISFA L'EQUAZIONE DI COASSOCIATIVITÀ:

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "\Delta"] \arrow[d, "\Delta"'] & C \otimes C \arrow[d, "\Delta \otimes Id_C"] \\ C \otimes C \arrow[r, "Id_C \otimes \Delta"'] & C \otimes C \otimes C \end{tikzcd} \qquad \left(\begin{tikzcd} A \otimes A \otimes A \arrow[r] \arrow[d] & A \otimes A \arrow[d] \\ A \otimes A \arrow[r] & A \end{tikzcd} \quad \begin{tikzcd} (a, b, c) \arrow[r, mapsto] \arrow[d, mapsto] & (a \cdot b, c) \arrow[d, mapsto] \\ (a, b \cdot c) \arrow[r, mapsto] & a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c \end{tikzcd} \right)$$

$$\Rightarrow (Id_C \otimes \Delta)\Delta = (\Delta \otimes Id_C)\Delta$$

PER SEMPLICITÀ SUPPORREMO CHE TUTTE LE COALGEBRE SODDISFANO L'EQUAZIONE DI COASSOCIATIVITÀ, QUINDI CI RIFERIREMO ALLE COALGEBRE GRADUATE SOTTOINTENDENDO COMMUTATIVE.

__DEF__ : SIANO (C,Δ_C), (D,Δ_D) COALGEBRE GRADUATE. UN **MORFISMO DI COALGEBRE GRADUATE** È $f: C \longrightarrow D$ MORFISMO DI R-MODULI GRADUATI CHE COMMUTA CON I COPRODOTTI:

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\Delta_C"'] & D \arrow[d, "\Delta_D"] \\ C\otimes C \arrow[r, "f^{\otimes 2}"] & D\otimes D \end{tikzcd} \qquad \Delta_D f = f^{\otimes 2} \Delta_C$$

$$\left(\begin{array}{ccc} A\otimes A & \xrightarrow{f^{\otimes 2}} & B\otimes B \\ (a,b) & \longmapsto & (f(a),f(b)) \\ \downarrow & & \downarrow \\ A & \xrightarrow{f} & B \\ ab & \longmapsto & f(ab) = f(a)\cdot f(b) \end{array} \right)$$

INDICHEREMO CON **GC(R)** LA CATEGORIA DELLE COALGEBRE GRADUATE SU UN ANELLO R

__ESEMPI__: ① SIA $1 \in R$. POSSIAMO DEFINIRE IL COPRODOTTO SU R COME:

$$\Delta_R : R \longrightarrow R\otimes R$$
$$a \longmapsto a\otimes 1 = 1\otimes a$$

$\Rightarrow (R,\Delta_R)$ È LA **COALGEBRA GRADUATA BANALE**.

② SIA $R[t] = \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} R\cdot t^n$ L'R-MODULO GRADUATO DEI POLINOMI SU R. DEFINIAMO:

$$\Delta_{R[t]} : R[t] \longrightarrow R[t]\otimes R[t]$$
$$t^n \longmapsto \sum_{i=0}^{n} t^i \otimes t^{n-i}$$

$\Rightarrow (R[t], \Delta_{R[t]})$ È LA **COALGEBRA GRADUATA POLINOMIALE**

AVENDO DEFINITO LE COALGEBRE COME DUALE CATEGORIALE DELLE ALGEBRE, È RAGIONEVOLE CHIEDERSI SE IL DUALE ALGEBRICO DELLE COALGEBRE SIA O MENO UN'ALGEBRA E SE IL DUALE ALGEBRICO DELLE ALGEBRE SIA O MENO UNA COALGEBRA. NEL PRIMO CASO LA RISPOSTA SARÀ SÌ, MENTRE LA SECONDA AFFERMAZIONE RISULTERÀ IN GENERALE FALSA.

__OSS__: SIA $(C,\Delta) \in GC(R)$. VOGLIAMO DEFINIRE SU $\mathrm{Hom}_R^\bullet(C,R)$ UNA STRUTTURA DI ALGEBRA. OSSERVIAMO CHE APPLICANDO IL FUNTORE $\mathrm{Hom}_R^\bullet(-,R)$ A $\Delta: C \longrightarrow C\otimes C$ OTTENIAMO:

$$\Delta^* : \mathrm{Hom}_R^\bullet(C\otimes C, R) \longrightarrow \mathrm{Hom}_R^\bullet(C,R)$$
$$\left(C\otimes C \xrightarrow{f} R\right) \longmapsto \left(C \xrightarrow{\Delta} C\otimes C \xrightarrow{f} R\right)$$

INOLTRE ESISTE UN NATURALE MORFISMO:

$$\phi : \mathrm{Hom}_R^\bullet(C,R) \otimes \mathrm{Hom}_R^\bullet(C,R) \longrightarrow \mathrm{Hom}_R^\bullet(C\otimes C, R)$$
$$\left(C \xrightarrow{f} R \otimes C \xrightarrow{g} R\right) \longmapsto \left(C\otimes C \xrightarrow{f\otimes g} R\otimes R \xrightarrow{\cdot} R\right)$$

PERCIÒ POSSIAMO DEFINIRE SU $\mathrm{Hom}_R^\bullet(C,R)$ IL SEGUENTE PRODOTTO DETTO **PRODOTTO DI CONVOLUZIONE**:

$$\star : \mathrm{Hom}^\bullet(C,R) \otimes \mathrm{Hom}_R^\bullet(C,R) \longrightarrow \mathrm{Hom}_R^\bullet(C,R)$$
$$\underbrace{\left(C \xrightarrow{f} R \otimes C \xrightarrow{g} R\right)}_{f\otimes g} \longmapsto \underbrace{\left(C \xrightarrow{\Delta} C\otimes C \xrightarrow{f\otimes g} R\otimes R \xrightarrow{\cdot} R\right)}_{\cdot\, f\otimes g\, \Delta}$$

DUNQUE IL DUALE DI UNA COALGEBRA È UN'ALGEBRA.

OSS: SIA $(A, \cdot)$ ALGEBRA GRADUATA. VOGLIAMO PROVARE A DEFINIRE SU $\mathrm{Hom}^\circ_R(A,R)$ UNA STRUTTURA DI COALGEBRA. OSSERVIAMO CHE APPLICANDO IL FUNTORE $\mathrm{Hom}^\circ_R(-,R)$ A $\cdot : A\otimes A \longrightarrow A$ OTTENIAMO:

$$\begin{aligned} \cdot^* : \mathrm{Hom}^\circ(A,R) &\longrightarrow \mathrm{Hom}^\circ(A\otimes A, R) \\ \left(A \xrightarrow{f} R\right) &\longmapsto \left(A\otimes A \xrightarrow{\cdot} A \xrightarrow{f} R\right) \end{aligned}$$

INOLTRE, COME VISTO PRIMA, ESISTE UN MORFISMO NATURALE:

$$\phi : \mathrm{Hom}^\circ_R(A,R)\otimes \mathrm{Hom}^\circ_R(A,R) \qquad \mathrm{Hom}^\circ_R(A\otimes A, R)$$

PERCIO' PER POTER COSTRUIRE UN MORFISMO CHE SIA UN COPRODOTTO DOVREMMO RIUSCIRE A SOLLEVARE LA SEGUENTE MAPPA:

$$\begin{tikzcd} & \mathrm{Hom}^\circ_R(A,R)\otimes \mathrm{Hom}^\circ_R(A,R) \arrow[d, "\phi"] \\ \mathrm{Hom}^\circ_R(A,R) \arrow[ur, dashed, "???"] \arrow[r, "\cdot^*"'] & \mathrm{Hom}^\circ_R(A\otimes A, R) \end{tikzcd}$$

IL CHE NON È SEMPRE POSSIBILE. AD ESEMPIO NEL CASO IN CUI $R = \Bbbk$ CON $\mathrm{char}\,\Bbbk = 0$ E $\dim_{\Bbbk}(A) < +\infty$, ALLORA ϕ È ISOMORFISMO E POSSIAMO INVERTIRLO OTTENENDO UN COPRODOTTO CHE RENDE IL DUALE ALGEBRICO DI UN'ALGEBRA UNA COALGEBRA.

ESEMPIO: SIA $(R[t], \Delta_{R[t]})$ LA COALGEBRA POLINOMIALE. ANDIAMO A CALCOLARCI IL SUO DUALE PER CAPIRE CHE TIPO DI ALGEBRA È. MOSTREREMO CHE È L'ALGEBRA DELLE SERIE DI POTENZE FORMALI.

RICORDIAMO CHE IL PRODOTTO SU $R[[t]]$ È DEFINITO COME:

$$\begin{aligned} \mu : R[[t]] \otimes R[[t]] &\longrightarrow R[t] \\ \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n t^n \otimes \sum_{n\in\mathbb{N}} b_n t^n &\longmapsto \sum_{n\in\mathbb{N}} \left(\sum_{i=0}^{n} a_i \cdot b_{n-i} \right) t^n \end{aligned}$$

ANDIAMO DUNQUE A DEFINIRE IL SEGUENTE MORFISMO DI MODULI GRADUATI (CHE È ISO)

$$\begin{aligned} \phi : \mathrm{Hom}^\circ_R(R[t], R) &\xrightarrow{\cong} R[[t]] \\ \left(R[t] \xrightarrow{f} R\right) &\longmapsto \sum_{n\in\mathbb{N}} f(t^n) t^n \\ \left(\begin{aligned} R[t] &\longrightarrow R \\ t^n &\longmapsto a^n \end{aligned}\right) &\longleftarrow\!\shortmid \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n t^n \end{aligned}$$

E VERIFICHIAMO CHE COMMUTA CON I COPRODOTTI:

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Hom}^*(R[t], R) \times \mathrm{Hom}^*_R(R[t], R) \arrow[r] \arrow[d, bend right, "\phi\times\phi"'] & \mathrm{Hom}^*(R[t], R) \arrow[d, bend left, "\phi"] \\ R[[t]] \quad R[[t]] \arrow[r] & R[[t]] \end{tikzcd}$$

$$\left(R[t] \xrightarrow{f} R \qquad R[t] \xrightarrow{g} R \right) \longmapsto \left(R[t] \xrightarrow{\chi} R \right) \quad \text{CON } \chi(t^n) = \cdot \circ f\otimes g \circ \Delta(t^n) = \sum_{i=1}^{n} f(t^i) g(t^{n-i})$$

$$\left(\sum_{n\in\mathbb{N}} f(t^n) t^n \qquad \sum_{n\in\mathbb{N}} g(t^n) t^n \right) \longmapsto \left(\sum_{n\in\mathbb{N}} \sum_{i=1}^{n} f(t^i) g(t^{n-i}) \; t^n \right)$$

DEF: SIA (C,Δ) UNA COALGEBRA GRADUATA. DIREMO CHE QUESTA E' **COCOMMUTATIVA** SE

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "\Delta"] \arrow[d, "\Delta"'] & C\otimes C \\ C\otimes C \arrow[ur, "Tw_2"'] & \end{tikzcd} \qquad \Delta = Tw_2\,\Delta$$

ESEMPI: ① LA COALGEBRA BANALE (R,Δ_R) E' COCOMMUTATIVA
② LA COALGEBRA POLINOMIALE $(R[t],\Delta_{R[t]})$ E' COCOMMUTATIVA

QUANDO LAVORIAMO CON ALGEBRE GRADUATE, UNA RICHIESTA MOLTO COMUNE E' QUELLA DI NILPOTENZA, CIOE' CHE $\exists n\in\mathbb{N}$ t.c. $a_1\cdot\ldots\cdot a_n=0$ $\forall a_i\in A$. CERCHEREMO DI TRASPORTARE QUESTO CONCETTO SULLE COALGEBRE E NE OSSERVEREMO LE PROPRIETA'.

DEF: SIA $(C,\Delta)\in GC(R)$. I **COPRODOTTI ITERATI** SONO $\Delta^n: C \to C^{\otimes n+1}$ DEFINITI COME

$$\begin{cases} \Delta^0 = Id_C : C \longrightarrow C \\ \Delta^n = (Id_C\otimes\Delta^{n-1})\Delta : C \xrightarrow{\Delta} C\otimes C \xrightarrow{Id_C\otimes\Delta^{n-1}} C\otimes C^{\otimes n} \end{cases}$$

$$\left(\begin{cases} \mu_1 = Id_A : A \longrightarrow A \\ \mu_n = (Id_A,\mu^{n-1})\mu : A^{\times n} = A \longrightarrow A\times A \longrightarrow A \\ \quad (a_1,\ldots,a_n,a_{n+1}) \mapsto (a_1,\ldots,a_n,a_{n+1}) \mapsto a_1\cdots a_{n+1} \end{cases}\right)$$

LEMMA: SIA (C,Δ) COALGEBRA GRADUATA E $F:(C,\Delta_C)\to(D,\Delta_D)$ MORFISMO DI COALGEBRE GRADUATE. ALLORA $\forall n\in\mathbb{N}$ E $\forall\, 0\leq a\leq n-1$ ABBIAMO

1) $$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "\Delta^n"] \arrow[d, "\Delta"'] & C^{\otimes a+1}\otimes C^{\otimes n-a}\cong C^{\otimes n+1} \\ C\otimes C \arrow[ur, "\Delta^a\otimes\Delta^{n-a-1}"'] & \end{tikzcd} \qquad \Delta^n = (\Delta^a\otimes\Delta^{n-a-1})\Delta$$

2) $$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "F"] \arrow[d, "\Delta_C"'] & D \arrow[d, "\Delta_D"] \\ C\otimes C \arrow[r, "F^{\otimes 2}"'] & D\otimes D \end{tikzcd} \qquad \Delta_D F = F^{\otimes 2}\Delta_C$$

DIM: 1) SE $a=0$ OPPURE $n=1$, NON C'E' NIENTE DA DIMOSTRARE. PROCEDIAMO PER INDUZIONE SU n:

$$(\Delta^a\otimes\Delta^{n-a-1})\Delta \underset{\text{definizione di }\Delta^a}{=} ((Id_C\otimes\Delta^{a-1})\Delta\otimes\Delta^{n-a-1})\Delta \underset{\text{raccolgo}}{=} (Id_C\otimes\Delta^{a-1}\otimes\Delta^{n-a-1})(\Delta\otimes Id_C)\Delta =$$

$$\underset{Id\otimes\Delta=\Delta\otimes Id}{=} (Id_C\otimes\Delta^{a-1}\otimes\Delta^{n-a-1})(Id_C\otimes\Delta)\Delta \underset{\text{distribuisco}}{=} (Id_C\otimes\underbrace{(\Delta^{a-1}\otimes\Delta^{n-a-1})\Delta}_{\Delta^{n-1}})\Delta$$

$$\underset{\text{passo induttivo}}{=} (Id_C\otimes\Delta^{n-1})\Delta \underset{\text{Definizione di }\Delta^n}{=} \Delta^n$$

2) $$\Delta_D^n F \underset{\text{Def. di }\Delta_D^n}{=} (\Delta_D^{n-1}\otimes Id_D)\Delta_D F \underset{F\text{ morfismo di coalgebre}}{=} (\Delta_D^{n-1}\otimes Id_D)F^{\otimes 2}\Delta_C$$

$$\underset{\text{Distribuisco}}{=} (\Delta_D^{n-1}F\otimes F)\Delta_C \underset{\text{Hp induttiva}}{=} (F^{\otimes n}\Delta_C^{n-1}\otimes F)\Delta_C$$

$$= F^{\otimes n+1}(\Delta_C^{n-1}\otimes Id_C)\Delta_C \underset{\text{Definizione di }\Delta_C^n}{=} F^{\otimes n+1}\Delta_C^n$$

$$\begin{tikzcd} C \arrow[rrr, "F"] \arrow[dr, "\Delta_C"] \arrow[ddd, "\Delta_C^n"'] & & & D \arrow[dl, "\Delta_D"'] \arrow[ddd, "\Delta_D^n"] \\ & C\otimes C \arrow[r, "F\otimes F"] \arrow[d, "Id_C\otimes\Delta_C^{n-1}"'] & D\otimes D \arrow[d, "\Delta_D^{n-1}\otimes Id_D"] & \\ & C\otimes C^{\otimes n} \arrow[r, "F\otimes F^{\otimes n}"] & D^{\otimes n}\otimes D & \\ C^{\otimes n+1} \arrow[ur, "\cong"] \arrow[rrr, "F^{\otimes n+1}"'] & & & D^{\otimes n+1} \arrow[ul, "\cong"'] \end{tikzcd}$$

□ c.v.d.

COROLLARIO: $\operatorname{Ker}\Delta^n\subseteq C$ È SOTTOCOALGEBRA $\forall n\in\mathbb{N}$ E $\forall F:C\to D$ MORFISMO DI COALGEBRE GRADUATE, $F(\operatorname{Ker}\Delta_C^n)\subseteq\operatorname{Ker}\Delta_D^n$

DIM: SIA $x\in\operatorname{Ker}\Delta^n$. DOBBIAMO MOSTRARE $\Delta(x)\in\operatorname{Ker}\Delta^n\otimes\operatorname{Ker}\Delta^n$. MA SE $\Delta^n(x)=0$, ALLORA

$$\Delta^{\otimes n+1}(\Delta^n(x))=0 \longrightarrow (\Delta^n\otimes\Delta^n)\Delta(x)=0 \longrightarrow \Delta(x)\in\operatorname{Ker}\Delta^n\otimes\Delta^n$$

$\Delta:(C,\Delta)\to(C\otimes C,\Delta\otimes\Delta)$ e' morfismo di coalgebre $\Rightarrow$ usiamo il punto 2 del lemma. □ c.v.d.

DEF: SIA (C,Δ) UNA COALGEBRA GRADUATA E $M \in GMod(R)$. SIA $p: C \to M$ MORFISMO DI R-MODULI GRADUATI. DIREMO CHE p È UN **COGENERATORE** DI C SE $\forall x \in C$ CON $x \neq 0$, $\exists n \in \mathbb{N}$ TALE CHE $p^{\otimes n} \Delta^{n-1}(c) \neq 0$. EQUIVALENTEMENTE SE LA SEGUENTE MAPPA È INIETTIVA:

$$\bar{p}\Delta^{\infty} : C \hookrightarrow \bar{T}^c M$$

$$\begin{tikzcd} C \arrow[d, "\Delta^{\infty}"'] \arrow[r, hook] & \bar{T}^c M \\ \bar{T}^c C \arrow[ur, "\bar{p}"'] & \end{tikzcd}$$

CON $\Delta^{\infty} = \sum_{n \in \mathbb{N}} \Delta^n : C \longrightarrow \bar{T}^c C = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} C^{\otimes n}$ E

$$\bar{p} = \sum_{n \geq 0} p^{\otimes n} : \bar{T}^c C \longrightarrow \bar{T}^c M$$

DEF: SIA $p: C \longrightarrow M$ COGENERATORE DI C COME SOPRA. SIA $f: B \longrightarrow C$ MORFISMO DI R-MODULI GRADUATI. LA **CORESTRIZIONE DI f A p** È $pf: B \to M$

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "pf"'] & C \arrow[d, "p"] \\ & M \end{tikzcd}$$

ESEMPIO: SIA $(R[t], \Delta)$ LA COALGEBRA POLINOMIALE. SIA $p: R[t] \longrightarrow R \otimes Rt$ LA PROIEZIONE STANDARD. ALLORA QUESTO È UN COGENERATORE PERCHÉ

$$p^{\otimes n}\Delta^{n-1}(t^n) = p^{\otimes n}(\underbrace{t \otimes \dots \otimes t}_{n\text{-volte}}) = t \otimes \dots \otimes t \neq 0$$

PROPOSIZIONE: SIA $p: D \longrightarrow M$ UN COGENERATORE DI $(D,\Delta_D) \in GC(R)$. ALLORA COMUNQUE PRESO $\phi: (C,\Delta_C) \longrightarrow (D,\Delta_D)$, QUESTO È UNIVOCAMENTE DETERMINATO DALLA SUA CORESTRIZIONE $p\phi : C \longrightarrow M$

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "\phi"] \arrow[dr, "p\phi"'] & D \arrow[d, "p"] \\ & M \end{tikzcd}$$

DIM: SIANO $\phi, \chi: (C,\Delta_C) \quad (D,\Delta_D)$ DUE MORFISMI DI COALGEBRE t.c. $p\phi = p\chi$. VOGLIAMO MOSTRARE $\phi = \chi$ CIOÈ $\forall c \in C$ $\phi(c) = \chi(c)$. POICHÉ p COGENERATORE, BASTA MOSTRARE CHE $\bar{p}\Delta_D^{\infty}(\phi(c)) = \bar{p}\Delta_D^{\infty}(\chi(c))$ CIOÈ $\forall n \in \mathbb{N}$

$$p^{\otimes n+1}\Delta_D^n(\phi(c)) = p^{\otimes n+1}\Delta_D^n(\chi(c)).$$

MA OSSERVIAMO CHE:

$$p^{\otimes n+1}\Delta_D^n\phi \underset{\substack{\phi \text{ morfismo di coalgebre}}}{=} p^{\otimes n+1}\phi^{\otimes n+1}\Delta_C^n = (p\phi)^{\otimes n+1}\Delta_C^n \underset{Hp}{=} (p\chi)^{\otimes n+1}\Delta_C^n = p^{\otimes n+1}\chi^{\otimes n+1}\Delta_C^n$$

$$\underset{\chi \text{ morfismo di coalgebre}}{=} p^{\otimes n+1}\Delta_D^n \chi$$

□ c.v.d.

DEF: UNA COALGEBRA GRADUATA (C,Δ) È **CONILPOTENTE** SE $\Delta^n = 0$ PER QUALCHE $n \in \mathbb{N}$, ED È DETTA **LOCALMENTE CONILPOTENTE** SE $C = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \operatorname{Ker}\Delta^n$ CIOÈ SE $\forall x \in C$ $\exists n \in \mathbb{N}$ t.c. $\Delta^n(x) = 0$

OSS:
- IL DUALE DI UNA COALGEBRA CONILPOTENTE (Resp.: Localmente Conilpotente) È UN'ALGEBRA NILPOTENTE (Resp.: Localmente Nilpotente)
- SE IL DUALE DI UN'ALGEBRA È UNA COALGEBRA, ALLORA SE QUESTA È NILPOTENTE (Resp.: Localmente Nilpotente), IL SUO DUALE È UNA COALGEBRA CONILPOTENTE (Resp.: Localmente Conilpotente).

COMODULI E CODERIVAZIONI

DELLE COSTRUZIONI PIU' UTILIZZATE NELL'AMBITO DELLE ALGEBRE, UN RUOLO IMPORTANTE È GIOCATO DAI MODULI. CERCHEREMO DI DARE UNA DEFINIZIONE ANALOGA IN QUESTO CONTESTO EVIDENZIANDO LE PRINCIPALI PROPRIETA'.

<u>DEF</u>: SIA $(C,\Delta)\in GC(R)$. UN **C-COMODULO** E' UNA TRIPLA (M,ϕ,χ) DOVE $M\in GMod(R)$ E $\phi: M\longrightarrow M\otimes C$, $\chi: M\longrightarrow C\otimes M$ SONO MORFISMI DI MODULI GRADUATI CHE SODDISFANO LE SEGUENTI PROPRIETA':

1)
$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "\phi"'] & M\otimes C \arrow[d, "Id_M\otimes\Delta"] \\ M\otimes C \arrow[r, "\phi\otimes Id_C"'] & M\otimes C\otimes C \end{tikzcd}$$
$$(Id_M\otimes\Delta)\phi=(\phi\otimes Id_C)\phi$$

2)
$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\chi"] \arrow[d, "\chi"'] & C\otimes M \arrow[d, "\Delta\otimes Id_M"] \\ C\otimes M \arrow[r, "Id_C\otimes\chi"'] & C\otimes C\otimes M \end{tikzcd}$$
$$(Id_C\otimes\chi)\chi=(\Delta\otimes Id_M)\chi$$

3)
$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\chi"] \arrow[d, "\phi"'] & C\otimes M \arrow[d, "Id_C\otimes\phi"] \\ M\otimes C \arrow[r, "\chi\otimes Id_C"'] & C\otimes M\otimes C \end{tikzcd}$$
$$(Id_C\otimes\phi)\chi=(\chi\otimes Id_C)\phi$$

$\times: M\times A \longrightarrow M$ $\quad\circ: A\times M\longrightarrow M$

$(ma)b=m(ab)$

$(ab)m=a(bm)$

$a(mb)=(am)b$

$M\times A\times A\longrightarrow M\times A$

$M\times A\longrightarrow M$

$A\times A\times M\longrightarrow A\times M$

$A\times M\longrightarrow M$

$A\times M\times A\longrightarrow A\times M$

$M\times A\longrightarrow M$

<u>ESEMPIO</u>: IL MODO PIU' NATURALE DI OTTENERE UN C-COMODULO E' TRAMITE UN MORFISMO DI COALGEBRE: SIA $F:(D,\Delta_D)\longrightarrow(C,\Delta_C)$ MORFISMO DI COALGEBRE GRADUATE, ALLORA POSSIAMO EQUIPAGGIARE D CON LA STRUTTURA DI C-COMODULO IN QUESTO MODO:

$$\phi: D\xrightarrow{\Delta_D} D\otimes D\xrightarrow{Id_D\otimes F} D\otimes C$$
$$\Rightarrow\ \phi=(Id_D\otimes F)\Delta_D$$

$$\chi: D\xrightarrow{\Delta_D} D\otimes D\xrightarrow{F\otimes Id_D} C\otimes D$$
$$\Rightarrow\ \chi=(F\otimes Id_D)\Delta_D$$

($f: B\longrightarrow A$, allora B e' un B-modulo con:

$\circ: B\times A\longrightarrow A$, $(b,a)\longmapsto f(b)\cdot a$

$\times: A\times B\longrightarrow A$, $(a,b)\longmapsto a\cdot f(b)$)

DATA UN'ALGEBRA A ED UN A-MODULO M, C'E' UN SOTTOANELLO DI $Hom_R^*(A,M)$ CHE GIOCA UN RUOLO IMPORTANTE: QUELLO DELLE DERIVAZIONI.

<u>DEF</u>: SIANO $(C,\Delta)\in GC(R)$ E (M,χ,ϕ) UN C-MODULO. DIREMO CHE $d\in Hom^n(M,C)$ E' UNA **CODERIVAZIONE** SE SODDISFA LA REGOLA DI **COLEIBNITZ**:

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "d"] \arrow[d, "\phi\oplus\chi"'] & C \arrow[d, "\Delta"] \\ M\otimes C\oplus C\otimes M \arrow[r, "d\otimes Id+Id\otimes d"'] & C\otimes C \end{tikzcd}$$

$$\Delta d=(d\otimes Id_C+Id_C\otimes d)(\phi,\chi)$$
$$\Delta d=(d\otimes Id_C)\phi+(Id_C\otimes d)\chi$$

($f: A\longrightarrow M$ derivazione se $f(a\cdot b)=f(a)\times b+a\circ f(b)$

$$\begin{tikzcd} A\otimes A \arrow[r, "\cdot"] \arrow[d, "\circ\oplus\times"'] & A \arrow[d, "f"] \\ A\otimes M\oplus M\otimes A \arrow[r] & M \end{tikzcd}$$)

ESEMPIO: SIA $F:(D,\Delta_D)\longrightarrow(C,\Delta_C)$ MORFISMO DI COALGEBRE GRADUATE E CONSIDERIAMO SU D LA STRUTTURA DI C-COMODULO INDOTTA DA F. ALLORA $d\in Hom^n_R(D,C)$ È UNA CODERIVAZIONE SE E SOLO SE:

$$\begin{tikzcd}
D \arrow[rr, "d"] \arrow[d, "\Delta_D"'] & & C \arrow[dd, "\Delta_C"] \\
D\otimes D \arrow[d, "(Id_D\otimes F,\ F\otimes Id_D)"'] & & \\
D\otimes C\oplus C\otimes D \arrow[rr, "d\otimes Id_C + Id_C\otimes d"'] & & C\otimes C
\end{tikzcd}$$

$$\Delta_C d = \left((d\otimes Id_C)(Id_D\otimes F) + (Id_C\otimes d)(F\otimes Id_D)\right)\Delta_D$$

CIOÈ:

$$\Delta_C d = (d\otimes F + F\otimes d)\,\Delta_D$$

INDICHEREMO CON $\mathbf{coder}^n_R(D,C,F) = \{ d\in Hom^n_R(D,C) \ :\ \Delta_C d = (d\otimes F + F\otimes d)\Delta_D\}$ E CON $\mathbf{coder}^n(C) = coder^n(C,C,Id_C) = \{ d\in Hom^n_R(C,C) \ :\ \Delta d = (d\otimes Id_C + Id_C\otimes d)\Delta\}$

LEMMA: SIA $(C,\Delta)\in GC(R)$. ALLORA $coder^*(C)\subseteq Hom^*_R(C,C)$ È SOTTOALGEBRA DI LIE GRADUATA.

ESEMPIO: SIANO $f_K: R[t]\longrightarrow R[t]$ t.c. $f_K = t\left(\frac{d}{dt}\right)^{K+1}$. SI DIMOSTRA CHE $\forall K\geq -1$ $f_K\in coder(R[t])$ DOVE LA COALGEBRA POLINOMIALE È CONSIDERATA CON IL COPRODOTTO $\Delta(t^n) = \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i} t^i\otimes t^{n-i}$.

ALLORA LA SOTTOALGEBRA DI LIE GENERATA DALLE CODERIVAZIONI f_K È LA STESSA DELL'ALGEBRA DI LIE GENERATA DALLE DERIVAZIONI $g_K = z^{K+1}\left(\frac{d}{dz}\right)$ DELL'ALGEBRA POLINOMIALE $R[z]$.

COALGEBRA TENSORIALE RIDOTTA E COALGEBRA SIMMETRICA RIDOTTA

QUANDO VENGONO INTRODOTTE NUOVE STRUTTURE È NATURALE CHIEDERSI QUALE SIANO I MODI PER COSTRUIRLE. NEL CASO DELLE COALGEBRE QUELLO CHE VORREMMO FARE È ASSOCIARE AD UN MODULO GRADUATO UNA COALGEBRA CHE GODA DI BUONE PROPRIETÀ, CIOÈ VORREMMO COSTRUIRE UN FUNTORE:

$$G:\ GMod(R)\longrightarrow GC(R)$$
$$M\longmapsto ???$$

OVVIAMENTE CI SONO MOLTI MODI DI FAR QUESTO, NOI ANDREMO AD UTILIZZARE GLI STRUMENTI DELL'ALGEBRA LINEARE VISTI ALL'INIZIO.

DEF: SIA $M\in GMod(R)$. LA **COALGEBRA TENSORIALE RIDOTTA** GENERATA DA M È $(\overline{T}^cM, \mathfrak{a})$ DOVE $\overline{T}^cM$ È IL MODULO GRADUATO TENSORIALE RIDOTTO E IL COPRODOTTO È DATO DA:

$$\mathfrak{a}:\ \overline{T}^cM\longrightarrow \overline{T}^cM\otimes\overline{T}^cM$$
$$m_1\otimes\cdots\otimes m_n\longmapsto \sum_{i=1}^{n-1}(m_1\otimes\cdots\otimes m_i)\otimes(m_{i+1}\otimes\cdots\otimes m_n)$$

INDICHEREMO CON $p_M:\overline{T}^cM\longrightarrow M$ LA PROIEZIONE CON $Ker\, p_M = \bigoplus_{n>1} M^{\otimes n}$ CHE È UN COGENERATORE PER $(\overline{T}^cM,\mathfrak{a})$.

OSS: DALLA DEFINIZIONE DEL COPRODOTTO SEGUE CHE $(\bar{T}^c M, a)$ È LOCALMENTE CONILPOTENTE, INFATTI FISSATO $x = m_1 \otimes \cdots \otimes m_n \in \bar{T}^c M$ ABBIAMO CHE:

$$a^{k-1}(m_1 \otimes \cdots \otimes m_n) = \sum_{1 \le i_1 \le \cdots \le i_k = n} (m_1 \otimes \cdots \otimes m_{i_1}) \otimes \cdots \otimes (m_{i_{k-1}} \otimes \cdots \otimes m_n)$$

DUNQUE SE $k > n$, $a^{k-1}(m_1 \otimes \cdots \otimes m_n) = 0$. POSSIAMO PERCIÒ DEFINIRE UN FUNTORE

$$\begin{tikzcd} \bar{T}^c(-): \mathrm{GMod}(R) \arrow[r] & \mathrm{LCGC}(R) \\ M \arrow[r, mapsto] \arrow[d, "f"] & (\bar{T}^c M, a) \arrow[d, "\bar{f}"] \\ N \arrow[r, mapsto] & (\bar{T}^c N, b) \end{tikzcd}$$

Coalgebre graduate localmente conilpotenti

INOLTRE OSSERVIAMO CHE C'È UNA RELAZIONE CON IL FUNTORE DIMENTICANTE:

$$\begin{tikzcd} \bar{T}^c(-): \mathrm{GMod}(R) \arrow[rr, equal] & & \mathrm{LCGC}(R) \ : F \\ C & (C, \Delta) \arrow[l, mapsto] \arrow[r, "\Delta_\infty"] & (\bar{T}^c C, a) \arrow[ll, bend left, leftarrow] \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} \bar{T}^c M \arrow[r, "p_M"] & M \arrow[r, mapsto] & (T^c M, a) \arrow[ll, bend left] \end{tikzcd}$$

DOVE $p_M : \bar{T}^c M \longrightarrow M$ È UN COGENERATORE PER $(\bar{T}^c M, a)$ E $\Delta^\infty = \sum_{n>0} \Delta^n : C \to \bar{T}^c C$ È BEN DEFINITO PER CONILPOTENZA ED È UN MORFISMO DI COALGEBRE POICHÈ:

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "\Delta^{n-1}"] \arrow[d, "\Delta"] & \bigoplus_{n>0} C^{\otimes n} \arrow[d, "a_{n,a}"] \\ C \otimes C \arrow[r, "\Delta^{a-1} \otimes \Delta^{n-a-1}"'] & \bigoplus_{n>0} \bigoplus_{i=0}^{n} C^{\otimes a} \otimes C^{\otimes n-a} \end{tikzcd}$$

$$a\, \Delta^\infty = \Delta^{\infty \otimes 2}\, \Delta$$
$$\Updownarrow$$
$$\sum_{n>0} \sum_{i=0}^{n} a_{n,a} \Delta^{n-1} \underset{\text{Lemma}}{=} \sum_{n>0} \sum_{i=0}^{n} (\Delta^{a-1} \otimes \Delta^{n-a-1}) \Delta$$

DUNQUE VALE IL SEGUENTE FATTO:

PROPOSIZIONE: I FUNTORI $\bar{T}^c(-)$ E F SONO AGGIUNTI, CIOÈ C'È UN ISOMORFISMO

$$\chi : \mathrm{Hom}_R(C, M) \xrightarrow{\cong} \mathrm{Hom}_{GC(R)}((C, \Delta), (\bar{T}^c M, a))$$

IN PARTICOLARE $\chi(f) = \bar{f} \Delta^\infty$ E $\chi^{-1}(F) = p_M F$

DIM: SIA $(C, \Delta) \in GC(R)$ E $M \in \mathrm{GMod}(R)$.

SIA $f : C \longrightarrow M$ MORFISMO DI MODULI GRADUATI. POICHÈ $\bar{f}$ E Δ^∞ SONO MORFISMI DI COALGEBRE $\Rightarrow \chi(f) = \bar{f} \Delta^\infty$ È BEN DEFINITO E L'UNICITÀ È GARANTITA POICHÈ LA SUA CORESTRIZIONE A $(\bar{T}^c M)$ TRAMITE p_M È $p_M F = p_M \bar{f} \Delta^\infty = f$.

$$\begin{tikzcd} \bar{T}^c(-): \mathrm{GMod}(R) \arrow[rr, shift left] & & \mathrm{LCGC}(R) \ : F \arrow[ll, shift left] \\ & C \arrow[dl, "F"'] \arrow[d, "f"] & (C, \Delta) \arrow[l, mapsto] \arrow[r, "\Delta^\infty"] \arrow[d, "F"] & (\bar{T}^c C, b) \arrow[dl, "\bar{f}"] \\ \bar{T}^c M \arrow[r, "p_M"'] & M \arrow[r, mapsto] & (\bar{T}^c M, a) & \end{tikzcd}$$

VICEVERSA, DATA $F : (C, \Delta) \quad (\bar{T}^c M, a)$, BASTA DEFINIRE $f = p_M F$ E OTTENIAMO $\chi(f) = F$

$\square$ c.v.d.

COROLLARIO: SIANO $M, N \in GMod(R)$. SIA $f: \bar{T}^cN \longrightarrow M$ MORFISMO DI MODULI GRADUATI. ALLORA LA MAPPA

$$F(m_1 \otimes \cdots \otimes m_n) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{1 \le i_1 \le \cdots \le i_k = n} f(m_1 \otimes \cdots \otimes m_{i_1}) \otimes \cdots \otimes f(m_{i_{k-1}} \otimes \cdots \otimes m_{i_k})$$

È L'UNICO MORFISMO DI COALGEBRE $F: \bar{T}^cN \longrightarrow \bar{T}^cM$ LA CUI RESTRIZIONE È f

DIM: BASTA PORRE $C = \bar{T}N$

$\square$ c.v.d.

$$\begin{tikzcd} \bar{T}^cN \arrow[d, "F"'] \arrow[dr, "f"] & N \\ \bar{T}^cM \arrow[r, "p_M"'] & M \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \bar{T}^cN \arrow[r, dashed, "a^n"] \arrow[d, "\exists! F"'] & \bar{T}^c(\bar{T}^cN) \arrow[dl, dashed, "\bar{f}"] \\ \bar{T}^cM & \end{tikzcd}$$

DEF: SIA $M \in GMod(R)$. LA **COALGEBRA SIMMETRICA RIDOTTA** GENERATA DA M È $(\bar{S}^cM, l)$ DOVE $\bar{S}^cM$ È IL MODULO SIMMETRICO RIDOTTO E IL COPRODOTTO È DATO DA:

$$l: \bar{S}^cM \longrightarrow \bar{S}^cM \otimes \bar{S}^cM$$

$$m_1 \odot \cdots \odot m_n \longmapsto \sum_{a=1}^{n} \sum_{\sigma \in S(a, n-a)} \varepsilon(\sigma) \, (m_{\sigma(1)} \odot \cdots \odot m_{\sigma(a)}) \otimes (m_{\sigma(a+1)} \odot \cdots \odot m_{\sigma(n)})$$

INDICHEREMO CON $p_M: \bar{S}^cM \longrightarrow M$ LA PROIEZIONE DI $\operatorname{Ker} p_n = \bigoplus_{n>1} M^{\odot n}$ CHE È UN COGENERATORE PER $(\bar{S}^cM, l)$

OSS: COME PER LA COALGEBRA TENSORIALE RIDOTTA, ANCHE QUESTA È LOCALMENTE CONILPOTENTE E PUÒ ESSERE INTERPRETATA COME UN FUNTORE:

$$\begin{array}{rccc} \bar{S}^c(-): & GMod(R) & \longrightarrow & LCGC(R) \\ & M & \longmapsto & (\bar{S}^cM, l) \\ & f \downarrow & & \downarrow \bar{f} \\ & N & \longmapsto & (\bar{S}^cN, m) \end{array}$$

OSS: CHE RELAZIONE C'È TRA $\bar{S}^c(M)$ E $\bar{T}^c(M)$? A LIVELLO DI MODULI GRADUATI POSSIAMO DEFINIRE LA NATURALE PROIEZIONE:

$$\pi: \bar{T}^cM \longrightarrow \bar{S}^cM$$

$$m_1 \otimes \cdots \otimes m_n \longmapsto m_1 \odot \cdots \odot m_n$$

E IL MODO PIÙ NATURALE DI TORNARE INDIETRO È TRAMITE IL SEGUENTE MORFISMO DI NORMALIZZAZIONE:

$$N: \bar{S}^cM \longrightarrow \bar{T}^cM$$

$$m_1 \odot \cdots \odot m_n \longmapsto \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \, m_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes m_{\sigma(n)}$$

È INOLTRE CHIARO CHE $\forall x = m_1 \odot \cdots \odot m_n \in \bar{S}^cM$, $\frac{\pi}{n!} N(x) = x$

OSS:

$$\begin{tikzcd} \bar{S}^cM \arrow[r, "l"] \arrow[d, "N"'] & \bar{S}^cM \otimes \bar{S}^cM \\ \bar{T}^cM \arrow[r, "a"'] & \bar{T}^cM \otimes \bar{T}^cM \arrow[u, "\pi \otimes \pi"'] \end{tikzcd}$$

$l \stackrel{?}{=} (\pi \otimes \pi)\, a\, N$

Si usa $N(m_1 \odot \cdots \odot m_n) = \sum_{\sigma \in S(a, n-a)} \varepsilon(\sigma) \, N(m_{\sigma(1)} \odot \cdots \odot m_{\sigma(a)}) \otimes \widetilde{N}(m_{\sigma(a+1)} \odot \cdots \odot m_{\sigma(n)})$