Topologie di Grothendieck.

Def: Una topologia di Grothendieck T è il dato di:

① Una categoria T ~~che supponiamo avere prodotti fibrati~~

② Un insieme CovT di famiglie $\{U_i \xrightarrow{\varphi_i} U\}$ di mappe (ricoprimenti) t.c.

a) se $\phi : U \to V$ iso $\Rightarrow \{\phi\} \in CovT$

b) se $\{U_i \to U\} \in CovT$ e $\{V_{ij} \to U_i\} \in CovT \ \forall i$, allora $\{V_{ij} \to U\} \in CovT$

c) se $\{U_i \to U\} \in CovT$, $V \to U$ è un morfismo, $U_i \times_U V$ esiste e $\{U_i \times_U V \to V\} \in CovT$.

Def Fascio - Prefascio

Sia T una Topologia, $\mathcal{C}$ una categoria dotata di prodotti, un prefascio $\mathcal{F}$ su T a valori in $\mathcal{C}$ è un funtore controvariante $\mathcal{F} : T \to \mathcal{C}$.
Se inoltre vale che $\mathcal{F}(U) \hookrightarrow \prod_i \mathcal{F}(U_i) \rightrightarrows \prod_{ij} \mathcal{F}(U_i \times_U U_j)$ è esatta $\forall \{U_i \to U\} \in CovT$ allora $\mathcal{F}$ è un fascio.
In termini più familiari la definizione può essere data da: $a_i \in \mathcal{F}(U_i) \ \forall i$, se $pr_1(a_i) = pr_2(a_j) \ \forall i,j$ allora $\exists!\, a \in \mathcal{F}(U)$ t.c. $a \to \prod_i a_i$.

Esempio 1 Vediamo che ha senso parlare di Topologie ossia consideriamo la categoria T degli ~~spazi~~ aperti di uno spazio topologico X, con i morfismi di inclusione fra $U, V \subset W$, $U \times_W V = U \cap V$, scegliamo come CovT i ricoprimenti aperti di U. Questi sono una topologia di Grothendieck e ogni funtore controvariante mi definisce un fascio nel modo ovvio.

Esempio 2 Sito di Zariski grande di X. Consideriamo ~~...~~ la categoria Sch/X e $\{U_i \xrightarrow{\varphi_i} U\}$ sono embedding aperti t.c. $\bigcup \varphi_i = U$ visti come insiemi [illegible] $(Sch/X)_{Zar}$

Esempio 3 Sito di Zariski piccolo di X consideriamo nella categoria Sch/X la sottocategoria piena data dagli $U \to X$ che sono immersioni aperte, consideriamo come ricoprimenti le mappe $\{U_i \xrightarrow{\varphi_i} U\}$ che sono embedding aperti e $\bigcup \varphi_i = U$ (X_{Zar})

Esempio 4 Topologia canonica su una categoria $\mathcal{C}$ con prodotti fibrati.

Def Una famiglia di epimorfismi è detta effettiva se (fissato $\{U_i \to V\}_\varphi$) si ha che $Hom(V, Z) \hookrightarrow \prod Hom(U_i, Z) \rightrightarrows \prod Hom(U_i \times_V U_j, Z) \ \forall Z \in \mathcal{C}$ è esatta, è detta effettiva universale se $\forall g : W \to V$ $\{U_i \times_V W \to W\}$ è una famiglia di epimorfismi effettiva.

Def Topologia canonica sceglie come ricoprimenti la famiglia $\{U_i \to U\}$ di famiglie di epimorfismi effettivi universali. Bisogna verificare le proprietà della topologia, ma prima e terza sono definizioni mentre la seconda basta verificare che la composizione è ancora un epimorfismo effettivo universale.

NB Dato F un funtore strettamente rappresentabile, allora questo è automaticamente un fascio su T (rappresentabile ie della forma $Hom(\cdot, Z)$) e ogni altra topologia T' con questa proprietà ha che ogni elemento di $Cov\,T'$ è un epimorfismo universale, dunque possiamo vederla come la più fine topologia che rende prefasci rappresentabili fasci.

Quello che vogliamo fare adesso è mostrare che le categorie di Prefasci abeliani su una topologia T fissata ha abbastanza iniettivi, ~~e che quindi è possibile~~ e questo ci fa definire la coomologia di Čech e vedere che è un funtore derivato destro.

Per dimostrare che P ha abbastanza iniettivi serve qualche richiamo sulle categorie abeliane

Def Ab5 Sia $\mathcal{C}$ una categoria abeliana con somme dirette e t.c. $\forall$ famiglia di sottooggetti $\{A_i\}_i$ di A t.c. $A_i \subset A_{i+1}$ e $\forall$ famiglia di morfismi $u_j : A_j \to B$ t.c. se $A_i \subset A_j$ allora u_i è indotto da u_j allora $\exists!\, u : \sum A_i \to B$ che induce tutti gli u_i.

Def generatori $\{Z_i\}$ è una famiglia di generatori di $\mathcal{C}$ se $\forall A \in \mathcal{C}$, $\forall B$ sottooggetto di A, $\exists Z_i$ e φ t.c. $Z_i \xrightarrow{\varphi} A$ non fattorizza per inclusione $B \hookrightarrow A$.

Vale inoltre: Teo 1.4.2 **Teo** Se $\mathcal{C}$ ha ~~abbastanza~~ generatori e soddisfa Ab5 $\Rightarrow \mathcal{C}$ ha abbastanza iniettivi.

- Dunque è sufficiente provare che P ha generatori e soddisfa Ab5.

Questo segue da:

Teo: Siano $\mathcal{C}, \mathcal{C}'$ categorie con $\mathcal{C}'$ abeliana. Consideriamo $Hom(\mathcal{C}, \mathcal{C}')$ allora
Teo 1.3.1 vale che: se $\mathcal{C}'$ soddisfa Ab5) e ha generatori, allora anche $Hom(\mathcal{C},\mathcal{C}')$ ha le stesse proprietà. ~~(la dimostrazione)~~

Scegliendo $\mathcal{C} = T^{op}$ e $\mathcal{C}' = Ab$. Allo stesso modo si dimostra che $F' \to F \to F''$ esatta $\Leftrightarrow F'(U) \to F(U) \to F''(U)$ esatta $\forall U \in T$.

Inoltre la categoria dei prefasci ha limiti diretti, $(\varinjlim F_i)(U) = \varinjlim (F_i(U))$ e abbiamo che il funtore $\varinjlim : Hom(I, P) \to P$ è esatto se I è pseudofiltrata.

Vediamo ora come si possa definire la coomologia di Čech su T. In analogia con il caso classico, fissato un ricoprimento $\{U_i \to U\} \in Cov\,T$, scegliamo $F \in P$ e definiamo il funtore $H^0(\{U_i \to U\}, \cdot) : P \to Ab$ ponendo $H^0(\{U_i \to U\}, F) = Ker\left(\prod F(U_i) \rightrightarrows \prod_{i,j} F(U_i \times_U U_j)\right)$ come nel caso classico questo funtore è esatto a sinistra ed additivo ed inoltre notiamo che, se F è un fascio, allora vale $H^0(\{U_i \to U\}, F) = F(U)$; dunque possiamo fattorizzare il funtore delle sezioni globali Γ_U di un fascio tramite $\Gamma_U : S \xrightarrow{i} P \xrightarrow{H^0(\{U_i \to U\}, \cdot)} Ab$.

Def q-esimo Gruppo di Coomologia di Čech legato a $\{U_i \to U\}$ e F.

$$H^q(\{U_i \to U\}, F) = R^q H^0(\{U_i \to U\}, \cdot)(F)$$

Poiché il funtore H^0 è esatto a sinistra questa definizione è ben posta.

Ma la cosa veramente interessante è che possiamo determinare i gruppi di coomologia di Čech anche per calcolarla direttamente, sia $q\geq 0$ consideriamo:

Def Gruppo delle q-cocatene a valori in F rispetto a $\{U_i\to U\}$:
$$C^q(\{U_i\to U\},F)=\prod_{(i_0,\dots,i_q)} F(U_{i_0}\times_U\dots\times_U U_{i_q})$$
con $d^q: C^q(\{U_i\to U\},F)\to C^{q+1}(\{U_i\to U\},F)$ dato da $(d^q s)_{i_0\dots i_{q+1}}=\sum_{n=0}^{q+1}(-1)^n F(\pi_n)(s_{i_0,\dots,\hat{i}_n,\dots,i_{q+1}})$
dove con $F(\pi_n)$ consideriamo la classica ~~proiezione~~ ~~diretta~~ inversa indotta "dimenticando" U_{i_n}.

E ovviamente vero che:

Teo (Teorema 2.23) Se $F\in P$, $H^q(\{U_i\to U\},F)$ è isomorfo al gruppo di coomologia del complesso delle catene.

La dimostrazione si basa tutto sul mostrare che ~~lo stesso ... risoluzione del funtore $H^q(\{U_i\to U\},F)$~~ data una successione esatta corta di prefasci, allora esiste una successione esatta di catene, a cui corrisponde una successione esatta lunga in coomologia (coomologia delle catene) $h^q(\{U_i\to U\},F'')\to h^{q+1}(\{U_i\to U\},F')$ con $0\to F'\to F\to F''\to 0$ e h^i il gruppo di coomologia delle catene) e che questi funtori valgono zero su tutti gli oggetti iniettivi.

~~Anche se così facendo abbiamo un modo effi~~ Il problema di questa costruzione è che ha una forte dipendenza dal ricoprimento scelto. Vorremmo fare qualcosa che valga a priori, l'idea è quella di usare raffinamenti di un ricoprimento. Vediamo come si generalizza questa idea:

Un raffinamento di ricoprimenti $\{U'_j\to U\}_{j\in J}\to\{U_i\to U\}_{i\in I}$ è dato da una mappa $\varepsilon: J\to I$ e una famiglia morfismi $f_j: U'_j\to U_{\varepsilon(j)}$ t.c.
$$\begin{tikzcd} & U & \\ U'_j \arrow[ur] \arrow[rr] & \circlearrowleft & U_{\varepsilon(j)} \arrow[ul] \end{tikzcd}$$

Possiamo quindi definire una categoria J_U che ha per oggetti i ricoprimenti di U e per morfismi i raffinamenti.

Sia dato $f:\{U_i\to U\}\to\{U'_j\to U\}$ un raffinamento, fissato $F\in P$ si ha un morfismo $H^q(f,F): H^q(\{U_i\to U\},F)\to H^q(\{U'_j\to U\},F)$ dato dalle mappe indotte dal diagramma
$$\begin{tikzcd} \prod_i F(U_i) \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] \arrow[d, "f^0"] & \prod_{i_1,i_2} F(U_{i_1}\times_U U_{i_2}) \arrow[d, "f^1"] \\ \prod_j F(U'_j) \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] & \prod_{j_1,j_2} F(U'_{j_1}\times_U U'_{j_2}) \end{tikzcd}$$

con f_0 e f_1 indotte dalla f. da cui otteniamo $H^0(F,f): H^0(\{U_i\to U\},F)\to H^0(\{U'_j\to U\},F)$. che si estende ad un morfismo $H^q(\{U_i\to U\},\cdot)\to H^q(\{U'_j\to U\},\cdot)$.
Abbiamo quindi funtore controvariante $\{U_i\to U\}\mapsto H^q(\{U_i\to U\},F)$ da J_U ad Ab. A patto di considerare J_U^{op} possiamo definire

Gruppo di Coomologia di Čech $\check{H}^q(U,F)=\varinjlim_{\{U_i\to U\}} H^q(\{U_i\to U\},F)$.

E ~~si può definire~~ segue in maniera abbastanza naturale, il seguente risultato:

Teo $F \to \check{H}^0(U,\cdot)$ è additivo e esatto a sinistra, $R^q\check{H}^0(U,\cdot)(F) = \check{H}^q(U,F)$

~~Il fatto che~~ Se il funtore $\varinjlim$ mappasse sequenze esatte in sequenze esatte ($\varinjlim \check{H}^0(U_i,A) \to A(U)$) la dimostrazione si limiterebbe a notare che la sequenza $0 \to \check{H}^0(U,F') \to \check{H}^0(U,F) \to \check{H}^0(U,F'')$ esatta data $0 \to F' \to F \to F'' \to 0$ esatta in P mostra che il funtore $F \to \check{H}^0(U,F)$ è esatto a sinistra; a questo punto procedere con la classica teoria coomologica. I dettagli della dimostrazione che $\varinjlim$ è esatto seguono in Tamme 2.2.7.
Notiamo ancora una volta che se il prefascio è un fascio vale che $\check{H}^0(U,F) = \varinjlim_{\{U_i \to U\}} H^0(\{U_i \to U\}, F) = \varinjlim_{\{U_i \to U\}} F(U) = F(U)$.

Quello che vedremo a questo punto è come utilizzare la teoria che abbiamo sviluppato finora per "fascificare". Proviamo a spiegare meglio il concetto: abbiamo un morfismo ovvio $i: S \hookrightarrow P$ poiché un fascio altro non è che un prefascio, inoltre i morfismi nella categoria dei fasci sono esattamente quelli della categoria dei prefasci (ossia S è una sottocategoria completa) (e da questo si possono dedurre ~~altre~~ interessanti proprietà che valgono per i prefasci ma non valgono per i fasci), vogliamo ora porci la domanda sull'esistenza del funtore aggiunto di i. Se esiste ed eventualmente come lavora. Il funtore esiste e lo descriveremo.
Sia dunque $F \in P$, consideriamo il funtore $+: P \to P$ così definito:
$F^+(U) = \check{H}^0(U,F) = \varinjlim_{\{U_i \to U\}} H^0(\{U_i \to U\}, F)$. Dobbiamo mostrare che F^+ sia effettivamente un prefascio. Per farlo sfruttiamo le proprietà della topologia: sia $V \to U$ abbiamo un funtore $\{U_i \to U\} \to \{U_i \times_U V \to V\}$ che manda ricoprimenti di U in ricoprimenti di V, e dunque otteniamo un morfismo $F^+(U) \to F^+(V)$ (indotto da $H^0(\{U_i \to U\}, F) \to H^0(\{U_i \times_U V \to V\}, F)$). Inoltre se f morfismo di prefasci $F \to G$ otteniamo in modo naturale morfismo $F^+ \to G^+$. ~~Un'altra proprietà~~ Notiamo che, se F non solo è un prefascio, ma addirittura un fascio, allora vale che:
$F^+(U) = \check{H}^0(U,F) = F(U)$, dunque nella categoria dei fasci $+$ è un isomorfismo, ~~nel caso in cui F non sia un fascio possiamo comunque considerare un morfismo da F in F+ dato da~~ ~~$F(U) = H^0(\{U \xrightarrow{id} U\}, F)$~~ $\to \check{H}^0(U,F) = F^+(U)$ da cui otteniamo il seguente:

F prefascio, G fascio

$$\begin{tikzcd} F \arrow[r] \arrow[d, "f"'] & F^+ \arrow[d, "f^+"] \\ G \arrow[r, "\sim"] & G^+ \end{tikzcd}$$

ossia f fattorizza tramite F^+. (4)

Ma vale anche di più: se $F \xrightarrow{f} G$ è la mappa nulla, fissiamo un ricoprimento $\{U_i \to U\}$ abbiamo una mappa $H^0(\{U_i \to U\}, F) \to H^0(\{U_i \to U\}, G) \cong G(U)$, ma per definizione $H^0(\{U_i \to U\}, \cdot) \subset \prod \cdot(U_i)$, dunque poiché f è nulla abbiamo che necessariamente la mappa indotta è nulla, e quindi vale lo stesso per $\check{H}^0(U,F) \to G(U) (= \check{H}^0(U,G))$.
Sfortunatamente il funtore che abbiamo definito non va ancora bene: avremmo finito se dato un prefascio F, F^+ fosse stato un fascio. Questo non vale, ma, fortunatamente si ha:

Teorema $(F^+)^+$ è un fascio per ogni prefascio F, mentre F^+ è solo un prefa-
Re 3.1.3 scio separato (ossia la mappa $F(U) \to \prod F(U_i)$ è iniettiva).

La dimostrazione segue la strategia classica per dimostrare che un certo oggetto è un fascio, e sfrutta pesantemente la definizione di $\check{H}^0(U,F) = F^+(U)$ tramite l'uso del limite diretto, usando per termine via via ricoprimenti più fini per rispettare le proprietà ~~tutte~~ di esattezza.

La sottocategoria dei fasci è una sottocategoria piena della categoria dei prefasci. Questo fa sì che "erediti" alcune utili proprietà. Ad esempio è ancora una categoria che rispetta Ab5, ha quozienti (e dunque abbastanza iniettivi). La dimostrazione di ciò non è difficile, ma alquanto tecnica, si guardi Teorema 3.2.1 per i dettagli.

Inoltre anche per la categoria dei fasci vale che, dato $F: I \to S$ $\exists \varinjlim F$ ed è uguale al fascio associato al prefascio $U \to \varinjlim F_i(U)$, e il funtore $\varinjlim$ è esatto a destra. Anche queste proprietà derivano essenzialmente dal fatto che S sia una sottocategoria piena di P.

A questo punto dunque è possibile sfruttare l'algebra omologica per ottenere i gruppi di coomologia di un fascio F. Scegliamo come categoria abeliana Ab, e abbiamo che il funtore (fissato U) $\Gamma_U: S \to Ab$ è esatto a sinistra ed additivo, in quanto possiamo vedere Γ_U come composizione di $i: S \to P$ e del funtore esatto delle sezioni globali per prefasci, e dato che i è esatto a sinistra (3.2.1) Γ_U è esatto a sinistra, da questo possiamo dare:

Def Gruppo di Coomologia di U a valori in F
$$H^q(U,F) = (R^q\Gamma_U)(F)$$

Vediamo un paio di esempi

Esempio Se X è uno spazio topologico considero la topologia di Grothendieck definita prima abbiamo che i gruppi di coomologia così definiti sono proprio i classici dati dalla risoluzione canonica.

Esempio Sia G un gruppo, consideriamo la categoria degli insiemi con un'azione sinistra di G. ~~La categoria dei fasci~~ E consideriamo la topologia canonica T_G. La categoria dei fasci su T_G è equivalente a quella dei G-moduli sinistri. L'equivalenza è data da $A \to Hom_G(\cdot, A)$; $F \to F(G)$. Consideriamo l'insieme $\{e\}$. Ha una struttura di G-insieme (l'unica possibile) e abbiamo che il fascio $Hom_G(e,A) = A_G$ con $A_G = \{a \in A \mid Ga = 0\}$.
Il funtore Γ_e si identifica con $A \to A_G$. ~~Vale inoltre che $H^q(e, Hom_G(\cdot,A)) = H^q(G,A)$ ossia la q-esima gruppo di coomologia di G a coefficienti in A.~~

Argomento opzionale: I funtori f_p e f^p

Un morfismo di prefasci non è niente altro che un funtore ~~delle categorie~~ fra funtori.

Def morfismo di topologie: Sia $f: T \to T'$ è morfismo di ~~categorie~~ topologie se è t.c.:

① $f: \mathrm{Cat}\,T \to \mathrm{Cat}\,T'$ è un funtore che soddisfa:

i) $\{U_i \xrightarrow{\varphi_i} U\}_{i\in I}$, $V \xrightarrow{f} U$ morfismo $\Rightarrow f(U_i \times_U V) \to f(U_i) \times_{f(U)} f(V)$ è iso $\forall i$

ii) $\{U_i \xrightarrow{\varphi_i} U\} \in \mathrm{Cov}\,T \Rightarrow \{f(U_i) \xrightarrow{f(\varphi_i)} f(U)\} \in \mathrm{Cov}\,T'$.

Sia quindi $f: T \to T'$ un morfismo di categorie, sia $F \in P'$ un prefascio su T', allora possiamo definire

Def $f^P(F)$ un prefascio su T tramite $(f^P(F))(U) = F(f(U))$. Inoltre il funtore f^P induce un morfismo di prefasci su T $\forall$ morfismo di prefasci su T'.

Il funtore f^P che abbiamo studiato è additivo, esatto e commuta con i limiti diretti tramite 2.1.4

Manca ~~altra~~ dim.

Teo Esiste un aggiunto sinistro f_P ~~esatto a sinistra, additivo e~~ e dunque f^P, ne esatto a destra.

La dimostrazione è sul teorema 2.3.1

Definiamo il funtore aggiunto $f_P F$ come la definiamo sugli $U' \in T'$ ($f_P: P \to P'$) consideriamo tutte le coppie (U, ϕ'), con $U \in T$, $\phi': U' \to f(U)$.

Definiamo i morfismi $(U_1, \phi'_1) \to (U_2, \phi'_2)$ come morfismi $\phi: U_1 \to U_2$ t.c.

$$\begin{tikzcd} & f(U_1) \arrow[dd, "f(\phi)"] \\ U' \arrow[ur, "\phi'_1"] \arrow[dr, "\phi'_2"'] \arrow[r, phantom, "\circlearrowleft"] & \\ & f(U_2) \end{tikzcd}$$

queste ~~oltre~~ formano una categoria $I_{U'}$. Abbiamo che $(U, \phi') \to F(U)$ è un funtore controvariante nella categoria $I_{U'}$. Definiamo quindi $f_P F(U') = \varinjlim_{(U,\phi')} F(U)$.

Dobbiamo mostrare che quello che abbiamo definito è effettivamente un prefascio. Sia $\varepsilon: U'_1 \to U'_2$ un morfismo in T', questo induce un ~~morfismo~~ funtore da $I_{U'_2}$ in $I_{U'_1}$, mappando $(V, \phi'_2) \to (V, \phi'_2 \circ \varepsilon)$. Quindi questo induce un morfismo $\varinjlim_{I_{V'}} F_{V'} \to \varinjlim_{I_{U'}} F_{U'}$ ossia un morfismo $f_P F(V') \to f_P F(U')$. Quindi effettivamente $f_P(F)$ è un prefascio.