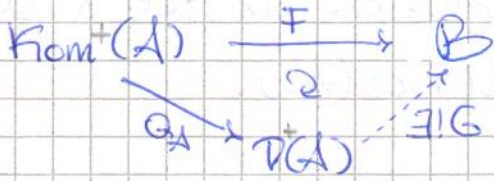


Richiami

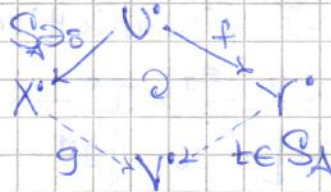
A abeliana. $F: \text{Hom}^+(A) \rightarrow \mathcal{B}$
 $q\text{-iso.} \longleftrightarrow \text{iso}$



Thm: A abeliana. $D^+(A) = \text{Hom}^+(A) / [S_A^{-1}]$

dove S_A e' la classe dei $q\text{-iso.}$ in $\text{Hom}^+(A)$

morfismi: $X', Y' \in \text{Ob}(D^+(A))$



Oss: $D^+(A)$ • additiva
 • NON abeliana

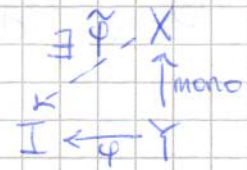
Def: $\text{Hom}^+(A) \subseteq \text{Hom}(A)$. $X' \in \text{Hom}^+(A)$ se $\exists i_i \in \mathbb{Z}$ t.c. $X^i = 0 \forall i < i_0$.

Risoluzioni iniettive e proiettive.

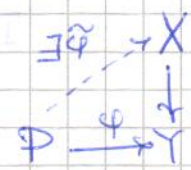
Def: $X' \in \text{Ob}(\text{Hom}(A))$. $Y' \in \text{Ob}(\text{Hom}^+(A))$ e' una risoluzione dx per X' se $\exists s: X' \rightarrow Y'$ $q\text{-iso.}$

$Z' \in \text{Ob}(\text{Hom}^-(A))$ e' una risoluzione sx per X' se $\exists t: Z' \rightarrow X'$ $q\text{-iso.}$

Def: $I \in \text{Ob}(A)$ e' INIETTIVO se $\forall Y \rightarrow X$ mono in $\text{Hom}_A(Y, X)$ e $\exists \hat{\varphi}: Y \rightarrow I$ che fa commutare il diagramma



Def: $P \in \text{Ob}(A)$ e' PROIETTIVO se $\forall Y \leftarrow X$ epi in $\text{Hom}_A(X, Y)$ e $\exists \hat{\varphi}: P \rightarrow Y$ che fa commutare il diagramma



Def: $X' \in \text{Ob}(\text{Hom}(A))$. $I' \in \text{Ob}(\text{Hom}^+(A))$ risoluzione iniettiva se I' e' una risoluzione sx per X' e I^i iniettivo $\forall i \in \mathbb{Z}$

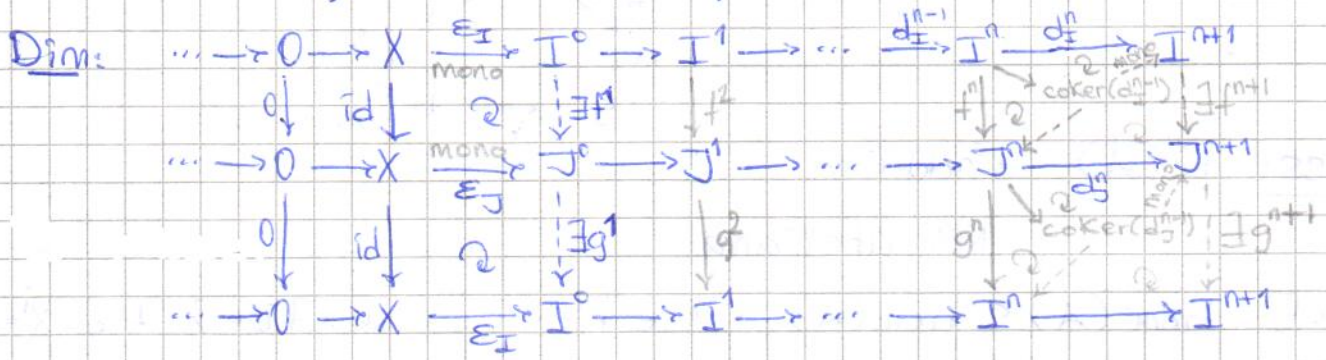
Def: $X' \in \text{Ob}(\text{Hom}(A))$. $P' \in \text{Ob}(\text{Hom}^-(A))$ è risoluzione proiettiva se P^0 è risoluzione ex per X' e P^i proiettivo $\forall i \in \mathbb{Z}$.

Def: $X \in \text{Ob}(A)$. $Y' \in \text{Ob}(\text{Hom}^+(A))$ risoluzione dx per X se Y^0 è risoluzione dx per $X[0] \in \text{Ob}(\text{Hom}(A))$.

Oss: $X \in \text{Ob}(A)$. $X[0] \in \text{Ob}(\mathcal{D}(A))$.
 $X[0] \cong$ risoluzione di X (in $\mathcal{D}(A)$)

Prop: $X \in \text{Ob}(A)$. P', Q' ris. proiettive per X . $\Rightarrow P' \cong Q'$ in $\mathcal{K}(A)$

Dualmente: I', J' ris. iniettive per X . $\Rightarrow I' \cong J'$ in $\mathcal{K}(A)$



Per induzione costruisco f^{n+1} :

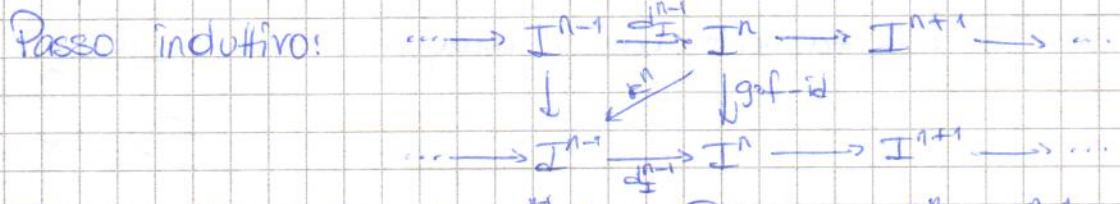
$$d_J^n \circ f^n \circ d_I^{n-1} = d_J^n \circ (d_J^{n-1} \circ f^{n-1}) = 0 \Rightarrow d_J^n \circ f^n \text{ fattorizza per } \text{coker}(d_J^{n-1}).$$

$$d_I^n \circ d_I^{n-1} = 0 \Rightarrow d_I^n \text{ fattorizza per } \text{coker}(d_I^{n-1})$$

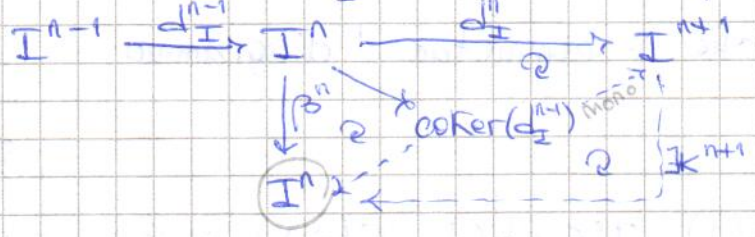
$$H^*(I^0) = 0 \Rightarrow \text{coker}(d_I^{n-1}) \rightarrow I^{n+1} \text{ è mono}$$

$\Rightarrow \exists f^{n+1}: I^{n+1} \rightarrow J^{n+1}$. La prova per g^{n+1} è analoga.

Resta da mostrare che $f \circ g \cong \text{Id}_J$ e $g \circ f \cong \text{Id}_I$.



Pengo: $\beta^n = g \circ f - \text{id}_{I^n} - d_I^n \circ k^n$. Si ha $\beta^n \circ d_I^{n-1} = 0$



$$\Rightarrow k^{n+1} \circ d_I^n = \beta^n = g \circ f - \text{id}_{I^n} - d_I^n \circ k^n$$

$\Rightarrow g$ e f sono reciprocamente inversi in $\mathcal{K}(A)$.

Funtori semi-esatti

Def: \mathcal{A}, \mathcal{B} abeliane. $F: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ esatto a dx (dx) se

$$0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \text{ esatta in } \mathcal{A}$$

$$\Rightarrow 0 \rightarrow F(A) \rightarrow F(B) \rightarrow F(C) \text{ esatta in } \mathcal{B}$$

$$\left(\begin{array}{l} A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0 \\ \Rightarrow F(A) \rightarrow F(B) \rightarrow F(C) \rightarrow 0 \text{ esatta in } \mathcal{B} \end{array} \right)$$

Goal: $F: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ esatto a sx. Voglio indurre $RF: D^+(\mathcal{A}) \rightarrow D^+(\mathcal{B})$

Def: $F: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ esatto a sx (dx).

$\mathcal{R} \subset \mathcal{A}$ sottocategoria ADATTA per F se:

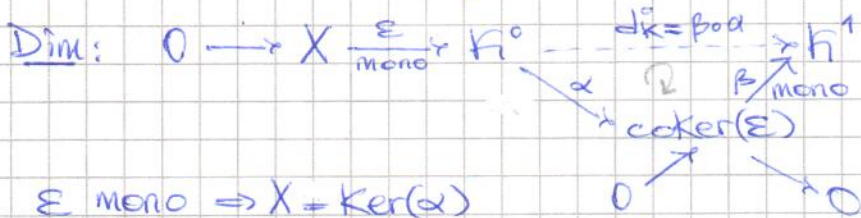
1) $X, Y \in \text{Ob}(\mathcal{R}) \Rightarrow X \oplus Y \in \text{Ob}(\mathcal{R})$

2) $\left. \begin{array}{l} X^\circ \in \text{Ob}(\text{Hom}^+(\mathcal{R})) \\ H^*(X^\circ) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow H^*(F(X^\circ)) = 0$

3) $\forall X \in \text{Ob}(\mathcal{A}) \exists Y \in \text{Ob}(\mathcal{R})$ t.c. $X \xrightarrow{\text{mono}} Y$ ($Y \xrightarrow{\text{epi}} X$)

Oss: \mathcal{R} adatta per $F: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ esatto a sx. Allora

$\forall X \in \text{Ob}(\mathcal{A}) \exists K^\circ \in \text{Ob}(\text{Hom}(\mathcal{R}))$ risoluzione dx. per X .



ε mono $\Rightarrow X = \text{Ker}(\alpha)$

β mono $\Rightarrow \text{Ker}(d_0^F) \cong \text{Ker}(\alpha)$

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \rightarrow & 0 & \rightarrow & X & \rightarrow & 0 & \rightarrow & 0 & \rightarrow & \dots \\ & & \downarrow & & \downarrow \varepsilon & & \downarrow & & \downarrow & & \\ \dots & \rightarrow & 0 & \rightarrow & K^0 & \xrightarrow{d_0} & K^1 & \rightarrow & K^2 & \rightarrow & \dots \end{array}$$

Definizione: $F: \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}$ è un'equivalenza di categorie se $\exists G: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{B}$
ed esistono due isomorfismi naturali $\varepsilon: F \circ G \rightarrow \text{Id}_{\mathcal{C}}$ e
 $\eta: G \circ F \rightarrow \text{Id}_{\mathcal{B}}$.

Oss: $F: \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}$ equivalenza di categorie se e solo se

1) $F: \text{Hom}_{\mathcal{B}}(X, Y) \xrightarrow{\cong} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(F(X), F(Y)) \quad \forall X, Y \in \text{Ob}(\mathcal{B})$

2) F è denso: $\forall Z \in \text{Ob}(\mathcal{C}) \exists X \in \text{Ob}(\mathcal{B})$ t.c. $F(X) \cong Z$.

Prop: $F: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ esatto a sinistra. \mathcal{P} una sottocategoria adatta
per F . Allora il morfismo naturale:

$$K^+(\mathcal{R})[\mathcal{S}_{\mathcal{P}}^{-1}] \longrightarrow K^+(\mathcal{A})[\mathcal{S}_{\mathcal{P}}^{-1}]$$

è un'equivalenza di categorie, dove $\mathcal{S}_{\mathcal{P}} \subseteq \mathcal{S}_{\mathcal{A}}$ è la classe
dei quasi-isomorfismi in $\text{Hom}^+(\mathcal{R})$.

Dim: G.-M. prop. III.6.4.

Funttore derivato destro.

$F: A \rightarrow B$ esatto a sinistra. \mathcal{R} adatta per F .

$$\begin{array}{c|c} \tilde{F}: \text{Hom}^+(R) \rightarrow \text{Hom}^+(B) & \text{Hom}_F^+: \text{Hom}^+(R) \rightarrow \text{Hom}^+(B) \\ \downarrow \psi & \downarrow \psi \\ A \mapsto \tilde{F}(A) = \{ \tilde{F}(A)^i = F(A)^i \} & A \mapsto \text{Hom}_F^+(A) \end{array}$$

Oss F additivo $\Rightarrow \text{Hom}_F^+$ ben definito (\tilde{F} manda morfismi omotopi in morf. omotopi)

Oss $f: A \rightarrow B$ quasi-isomorfismo in $\text{Hom}^+(R)$

- $\Rightarrow C(f) \in \text{Ob}(\text{Hom}^+(R))$ aciclico
- $\Rightarrow \tilde{F}(C(f)) \cong C(\tilde{F}(f))$ aciclico in $\text{Hom}^+(B)$
- $\Rightarrow \text{Hom}_F^+(f)$ quasi-isomorfismo in $\text{Hom}^+(B)$

Oss Hom_F^+ manda q-iso. in q-iso. Dunque induce

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}^+(R)[S_R^{-1}] \xrightarrow{\tilde{F}} \text{Hom}^+(B)[S_B^{-1}] = D^+(B) & & \\ \uparrow \exists \psi & \searrow \text{RF} = \tilde{F} \circ \psi & \\ \text{Hom}^+(A)[S_A^{-1}] = D^+(A) & & \end{array}$$

Oss A priori RF dipende da \mathcal{R} e da ψ .

Thm: $F: A \rightarrow B$ esatto a sinistra. Se esiste una sottocategoria adatta per F , allora RF e' unico (a meno di isomorfismo).

Dim (idea) Si mostra che RF gode della seguente proprieta' universale:

$$\begin{array}{ccc} \exists \varepsilon_F: Q_B \circ \text{Hom}_F^+ \rightarrow \text{RF} \circ Q_A \text{ t.c.} & \begin{array}{ccc} Q_A \rightarrow D^+(A) & \xrightarrow{\text{RF}} & D^+(B) \\ \downarrow \text{Hom}_F^+ & & \downarrow Q_B \\ \text{Hom}^+(A) & \rightarrow & \text{Hom}^+(B) \end{array} & \begin{array}{c} \downarrow G \\ D^+(B) \end{array} \\ \downarrow G: D^+(A) \rightarrow D^+(B) & & \\ \varepsilon_G: Q_B \circ \text{Hom}_F^+ \rightarrow G \circ Q_A & & \\ \Rightarrow \exists! \eta: \text{RF} \rightarrow G & & \end{array}$$

talche: $\varepsilon_G = (\eta \circ Q_A) \circ \varepsilon_F$ (il lemma e' alla fine)

Thm: \mathcal{I} abeliana con abbastanza iniettivi. Allora la classe \mathcal{I} e' adatta per ogni funttore esatto a sinistra.

Dim: Mostro che F manda complessi aciclici in $\text{Hom}^+(\mathcal{I})$ in complessi aciclici. Sia $I' \in \text{Hom}^+(\mathcal{I})$ aciclico. $\Rightarrow 0: I' \rightarrow I'$ e' un

quasi-isomorfismo. Dal lemma è anche omotopo all'identità. Pertanto $0: F(I^\bullet) \rightarrow F(I^\bullet)$ è omotopo a $\text{Id}_{F(I^\bullet)} \Rightarrow F(I^\bullet)$ è aciclico.

Def: $F: A \rightarrow B$ esatto a sinistra. Se esiste R_F , poniamo $\forall i \in \mathbb{Z}$
 $R^i F = H^i \circ R_F: D^+(A) \rightarrow B$ funtori derivati classici
 i -esimo funtore derivato destro di F .

Prop: $s: I^\bullet \rightarrow K^\bullet$ quasi-isomorfismo da $K^+(I)$ in $K^+(A)$. Allora $\exists t: K^\bullet \rightarrow I^\bullet$ tale che $t \circ s \simeq \text{Id}_{I^\bullet}$

Dim: $I^\bullet \xrightarrow{s} K^\bullet \xrightarrow{(0, \text{id})} C(s) \xrightarrow{\pi_1} I^\bullet[1]$

s q-iso. $\Rightarrow C(s)$ aciclico. Dal lemma $\pi_1 \simeq \text{Id}_{I^\bullet[1]}$.

$$\begin{array}{ccccccc} \rightarrow & I^{i-1} \oplus K^{i-2} & \rightarrow & I^i \oplus K^{i-1} & \xrightarrow{(-d_i, s^i + d_K^i)} & I^{i+1} \oplus K^i & \rightarrow \\ & \downarrow \text{id}_I + 0_K & \nearrow t^{i+1} + t^{i-1} & \downarrow \text{id}_I + 0_K & \nearrow r^i + t^i & \downarrow \text{id}_I + 0_K & \\ \rightarrow & I^{i-1} & \xrightarrow{-d_{I^{i-1}}} & I^i & \xrightarrow{-d_I^i} & I^{i+1} & \rightarrow \end{array}$$

$$\pi_1 = \text{id}_{I^\bullet[1]} + 0_K = \begin{bmatrix} -d_I^i f - f d_{I^{i-1}} + t s^i \\ -d_I^{i+1} t + t d_K^i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_{I^\bullet} f + f d_{I^\bullet} + t s \\ -d_I^{i+1} t + t d_K^i \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow t s \simeq \text{id}_I$ e t morfismo di complessi.

Cor: $I^\bullet \in \text{Ob}(K^+(I))$. Allora: $\text{Hom}_{K^+(I)}(X^\bullet, I^\bullet) \cong \text{Hom}_{D(A)}(X^\bullet, I^\bullet)$

Dim: L'isomorfismo è dato da: $(X^\bullet \rightarrow I^\bullet) \longmapsto \begin{pmatrix} X^\bullet & \xrightarrow{\text{Id}} & X^\bullet & \xrightarrow{f} & I^\bullet \end{pmatrix}$

Verifichiamo la suriettività:

$$\begin{array}{ccc} \text{Sur} & & \\ \swarrow & & \searrow \\ X^\bullet & \xrightarrow{?} & I^\bullet \\ \downarrow g & & \downarrow \text{SES} \\ Y^\bullet & & \end{array} \Rightarrow \exists t: Y^\bullet \rightarrow I^\bullet \text{ t.c. } t \circ s \simeq \text{id}_I \Rightarrow t \circ g \longmapsto \begin{pmatrix} X^\bullet & \xrightarrow{r} & Y^\bullet & \xrightarrow{f} & I^\bullet \end{pmatrix}$$

Oss: \mathcal{A} categoria abeliana con abbastanza iniettivi. $X \in \text{Ob}(\mathcal{A})$

$\text{Hom}(X, -): \mathcal{A} \rightarrow \text{Ab}$ (= gruppi abeliani)

è un funtore esatto a sinistra.

Esempio: A abeliana con abbastanza iniettivi. $X \in \text{Ob}(A)$.

$\mathcal{R} = \mathcal{I}$ adatta per $\text{Hom}_X(X, -)$. Chi è $\mathcal{R}\text{Hom}_X(X, -)$?

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{K}^+(\mathcal{I})[\mathcal{S}_{\mathcal{I}}^{-1}] & \xrightarrow{\text{Hom}(X, -)} & \mathcal{D}^+(\text{Ab}) \\
 \uparrow \psi & & \nearrow \\
 \mathcal{K}^+(A)[\mathcal{S}_A^{-1}] = \mathcal{D}^+(A) & & \mathcal{R}\text{Hom}_X(X, -)
 \end{array}$$

$Y^* \in \text{Ob}(\mathcal{D}^+(A)) \rightsquigarrow \psi(Y^*) = I_Y^* \in \text{Ob}(\mathcal{K}^+(\mathcal{I})[\mathcal{S}_{\mathcal{I}}^{-1}])$

$\rightsquigarrow \overline{\text{Hom}}_X(X, I_Y^*) = \text{Hom}_X(X, I_Y^*)$

$\Rightarrow \mathcal{R}^i \text{Hom}_X(X, Y^*) = H^i(\mathcal{R}\text{Hom}_X(X, Y^*)) = H^i(\text{Hom}_X(X, I_Y^*)) \in \text{Ab}$

Oss: Abbiamo definito $\mathcal{R}^i \text{Hom}_X(X, -)$ su $\mathcal{D}^+(A)$. Se $Z \in A$ prendo

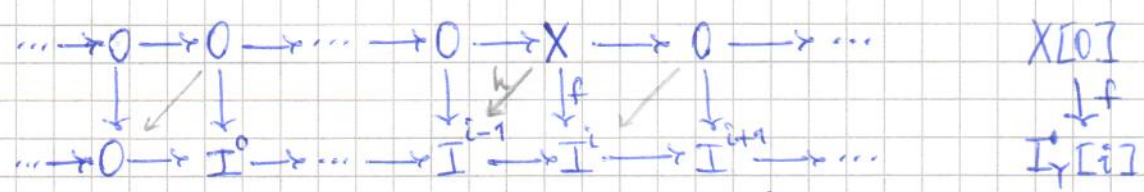
$Y^* = Z[0]$, allora $\mathcal{R}^i \text{Hom}_X(X, Z[0]) = H^i(\text{Hom}_X(X, I_Z^*)) = \text{Ext}_X^i(X, Z)$.

Thm: A abeliana con abbastanza iniettivi. $X, Y \in \text{Ob}(A)$. Allora:

$\text{Ext}_X^i(X, Y) = H^i(\text{Hom}_X(X, I_Y^*)) \cong \text{Hom}_{\mathcal{D}(A)}(X[0], Y[i])$

Dim: $\text{Hom}_{\mathcal{D}(A)}(X[0], Y[i]) \cong \text{Hom}_{\mathcal{D}(A)}(X[0], I_Y^*[i]) \cong [\text{Prop.}] \cong$

$\cong \text{Hom}_{\mathcal{K}(A)}(X[0], I_Y^*[i]) \cong H^i(\text{Hom}_X(X, I_Y^*))$



f morfismo di complessi $\Leftrightarrow f \in Z^i(\text{Hom}_X(X, I_Y^*))$

$f \cong 0 \Leftrightarrow f \in B^i(\text{Hom}_X(X, I_Y^*))$.

Lemma: $C \in \text{Ob}(\text{Kom}(A))$, $I \in \text{Ob}(\text{Kom}^+(I))$, $f: C \rightarrow I$ morfismo di complessi. Allora, se $H^*(C) = 0$, $f \simeq 0$.

Dim:

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \rightarrow & C^{-1} & \rightarrow & C^0 & \rightarrow & C^1 & \rightarrow & C^2 & \rightarrow & \dots \\ & & \downarrow & \swarrow 0 & \downarrow f^0 & \swarrow k^0 & \downarrow f^1 & \swarrow k^1 & \downarrow f^2 & \swarrow k^2 & \downarrow f^3 & \swarrow k^3 & \dots \\ \dots & \rightarrow & 0 & \rightarrow & I^0 & \rightarrow & I^1 & \rightarrow & I^2 & \rightarrow & \dots \end{array}$$

Per induzione, costruisco k^{n+1} conoscendo $k^n: C^n \rightarrow I^n$.

$$\begin{array}{ccccc} & & C^n & \xrightarrow{d_C^n} & C^{n+1} & \xrightarrow{d_C^{n+1}} & C^{n+2} \\ & \swarrow k^{n-1} & \downarrow f^n & \swarrow k^n & \downarrow f^{n+1} & & \\ I^{n-1} & \xrightarrow{d_I^{n-1}} & I^n & \xrightarrow{d_I^n} & I^{n+1} & & \end{array}$$

$$f^{n+1} \circ d_C^n = d_I^n \circ f^n = d_I^n \circ (k^n \circ d_C^n + d_I^n \circ k^{n-1}) = (d_I^n \circ k^n) \circ d_C^n$$

$$\Rightarrow (f^{n+1} - d_I^n \circ k^n) \circ d_C^n = 0.$$

