Richiami

$\mathcal{A}$ abeliana. $F: K^+(\mathcal{A}) \longrightarrow \mathcal{B}$
q.-iso. $\longmapsto$ iso

$$\begin{tikzcd} K^+(\mathcal{A}) \arrow[rr, "F"] \arrow[dr, "Q_{\mathcal{A}}"'] & \arrow[d, phantom, "\cong"] & \mathcal{B} \\ & D^+(\mathcal{A}) \arrow[ur, dashed, "\exists! G"'] & \end{tikzcd}$$

thm: $\mathcal{A}$ abeliana. $D^+(\mathcal{A}) = K^+(\mathcal{A})[S_{\mathcal{A}}^{-1}]$
dove $S_{\mathcal{A}}$ è la classe dei q.-iso. in $K^+(\mathcal{A})$

morfismi: $X^\cdot, Y^\cdot \in Ob(D^+(\mathcal{A}))$

$$\begin{tikzcd} & U^\cdot \arrow[dl, "S_{\mathcal{A}} \ni s"'] \arrow[dr, "f"] \arrow[d, phantom, "\cong"] & \\ X^\cdot \arrow[dr, dashed, "g"'] & & Y^\cdot \arrow[dl, dashed, "t \in S_{\mathcal{A}}"] \\ & Y'^\cdot & \end{tikzcd}$$

Oss: $D^+(\mathcal{A})$
- additiva
- NON abeliana

Def: $K^+(\mathcal{A}) \subseteq K(\mathcal{A})$. $X^\cdot \in K^+(\mathcal{A})$ se $\exists i_0 \in \mathbb{Z}$ t.c. $X^i = 0$ $\forall i < i_0$

Risoluzioni iniettive e proiettive.

Def: $X^\cdot \in Ob(K(\mathcal{A}))$. $Y^\cdot \in Ob(K^+(\mathcal{A}))$ è una risoluzione dx per $X^\cdot$ se $\exists\ s: X^\cdot \longrightarrow Y^\cdot$ q.-iso.
$Z^\cdot \in Ob(K^-(\mathcal{A}))$ è una risoluzione sx per $X^\cdot$ se $\exists\ t: Z^\cdot \longrightarrow X^\cdot$ q.-iso.

Def: $I \in Ob(\mathcal{A})$ è INIETTIVO se $\forall\ Y \longrightarrow X$ mono in $Hom_{\mathcal{A}}(Y, X)$ e $\forall \varphi: Y \longrightarrow I$ $\exists \tilde{\varphi}: X \longrightarrow I$ che fa commutare il diagramma

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[dl, dashed, "\exists \tilde{\varphi}"'] \\ I & Y \arrow[l, "\varphi"] \arrow[u, "mono"'] \end{tikzcd}$$

Def: $P \in Ob(\mathcal{A})$ è PROIETTIVO se $\forall\ Y \longleftarrow X$ epi in $Hom_{\mathcal{A}}(X, Y)$ e $\forall \varphi: P \longrightarrow Y$ $\exists \tilde{\varphi}: P \longrightarrow X$ che fa commutare il diagramma

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[d] \\ P \arrow[ur, dashed, "\exists \tilde{\varphi}"] \arrow[r, "\varphi"] & Y \end{tikzcd}$$

Def: $X^\cdot \in Ob(K(\mathcal{A}))$. $I^\cdot \in Ob(K^+(\mathcal{A}))$ risoluzione iniettiva se $I^\cdot$ è una risoluzione sx per $X^\cdot$ e I^i iniettivo $\forall i \in \mathbb{Z}$

Def: $X^\bullet \in Ob(Kom(\mathcal{A}))$. $P^\bullet \in Ob(Kom^-(\mathcal{A}))$ è risoluzione proiettiva se $P^\bullet$ è risoluzione sx per $X^\bullet$ e P^i proiettivo $\forall i \in \mathbb{Z}$.

Def: $X \in Ob(\mathcal{A})$. $Y^\bullet \in Ob(Kom^+(\mathcal{A}))$ risoluzione dx per X se $Y^\bullet$ è risoluzione dx per $X[0] \in Ob(Kom(\mathcal{A}))$.

Oss: $X \in Ob(\mathcal{A})$. $X[0] \in Ob(D(\mathcal{A}))$.
$X[0] \cong$ risoluzione di X (in $D(\mathcal{A})$)

Prop: $X \in Ob(\mathcal{A})$. $P^\bullet, Q^\bullet$ ris. proiettive per X. $\Rightarrow P^\bullet \cong Q^\bullet$ in $K^-(\mathcal{A})$

Dualmente: $I^\bullet, J^\bullet$ ris. iniettive per X. $\Rightarrow I^\bullet \cong J^\bullet$ in $K^+(\mathcal{A})$

Dim:

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r] \arrow[dd, "0"] & X \arrow[r, "\varepsilon_I", "\mathrm{mono}"'] \arrow[dd, "\mathrm{id}"] & I^0 \arrow[r] \arrow[dd, dashed, "\exists f^1"] & I^1 \arrow[r] \arrow[dd, "f^2"] & \cdots \arrow[r, "d_I^{n-1}"] & I^n \arrow[rr, "d_I^n"] \arrow[dr] \arrow[dd, "f^n"'] & & I^{n+1} \arrow[dd, dashed, "\exists f^{n+1}"] \\
 & & & & & & & \mathrm{coker}(d_I^{n-1}) \arrow[ur, "\mathrm{mono}"'] \arrow[dl, dashed] & \\
\cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r] \arrow[dd, "0"] & X \arrow[r, "\mathrm{mono}", "\varepsilon_J"'] \arrow[dd, "\mathrm{id}"] & J^0 \arrow[r] \arrow[dd, dashed, "\exists g^1"] & J^1 \arrow[r] \arrow[dd, "g^2"] & \cdots \arrow[r] & J^n \arrow[rr, "d_J^n"] \arrow[dr] \arrow[dd, "g^n"'] & & J^{n+1} \arrow[dd, dashed, "\exists g^{n+1}"] \\
 & & & & & & & \mathrm{coker}(d_J^{n-1}) \arrow[ur, "\mathrm{mono}"'] \arrow[dl, dashed] & \\
\cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r] & X \arrow[r, "\varepsilon_I"'] & I^0 \arrow[r] & I^1 \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & I^n \arrow[rr] & & I^{n+1}
\end{tikzcd}$$

Per induzione costruisco f^{n+1}:

$d_J^n \circ f^n \circ d_I^{n-1} = d_J^n \circ (d_J^{n-1} \circ f^{n-1}) = 0 \Rightarrow d_J^n \circ f^n$ fattorizza per $\mathrm{coker}(d_I^{n-1})$. $d_I^n \circ d_I^{n-1} = 0 \Rightarrow d_I^n$ fattorizza per $\mathrm{coker}(d_I^{n-1})$

$H^*(I^\bullet) = 0 \Rightarrow \mathrm{coker}(d_I^{n-1}) \dashrightarrow I^{n+1}$ è mono

$\Rightarrow \exists f^{n+1} : I^{n+1} \to J^{n+1}$. La prova per g^{n+1} è analoga.

Resta da mostrare che $f \circ g \simeq Id_J$ e $g \circ f \simeq Id_I$.

Passo induttivo:

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & I^{n-1} \arrow[r, "d_I^{n-1}"] \arrow[d] & I^n \arrow[r] \arrow[d, "g\circ f - \mathrm{id}"] \arrow[dl, "k^n"'] & I^{n+1} \arrow[r] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & I^{n-1} \arrow[r, "d_I^{n-1}"'] & I^n \arrow[r] & I^{n+1} \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Pongo: $\beta^n = g \circ f - id_{I^n} - d_I^{n-1} k^n$. Si ha $\beta^n \circ d_I^{n-1} = 0$

$$\begin{tikzcd}
I^{n-1} \arrow[r, "d_I^{n-1}"] & I^n \arrow[rr, "d_I^n"] \arrow[dr] \arrow[dd, "\beta^n"'] & & I^{n+1} \arrow[ddll, dashed, "\exists k^{n+1}"] \\
 & & \mathrm{coker}(d_I^{n-1}) \arrow[ur, "\mathrm{mono}"'] \arrow[dl, dashed] & \\
 & I^n & &
\end{tikzcd}$$

$\Rightarrow k^{n+1} \circ d_I^n = \beta^n = g \circ f - id_{I^n} - d_I^{n-1} \circ k^n$

$\Rightarrow g$ e f sono reciprocamente inversi in $K^+(\mathcal{A})$.

Funtori semi-esatti

Def: $\mathcal{A},\mathcal{B}$ abeliane. $F:\mathcal{A}\to\mathcal{B}$ esatto a sx (dx) se

$0\to A\to B\to C$ esatta in $\mathcal{A}$

$\Rightarrow\ 0\to F(A)\to F(B)\to F(C)$ esatta in $\mathcal{B}$

$$\left(\begin{array}{l} A\to B\to C\to 0 \\ \Rightarrow F(A)\to F(B)\to F(C)\to 0 \text{ esatta in } \mathcal{B}\end{array}\right)$$

Goal: $F:\mathcal{A}\to\mathcal{B}$ esatto a sx. Voglio indurre $RF: D^+(\mathcal{A})\to D^+(\mathcal{B})$

Def: $F:\mathcal{A}\to\mathcal{B}$ esatto a sx (dx).

$\mathcal{R}\subseteq\mathcal{A}$ sottocategoria ADATTA per F se:

1) $X,Y\in Ob(\mathcal{R}) \Rightarrow X\oplus Y\in Ob(\mathcal{R})$

2) $\left.\begin{array}{l} X^\bullet\in Ob(Kom^+(\mathcal{R})) \\ H^*(X^\bullet)=0\end{array}\right\} \Rightarrow H^*(\tilde{F}(X^\bullet))=0$

3) $\forall X\in Ob(\mathcal{A})\ \exists Y\in Ob(\mathcal{R})$ t.c. $X\xrightarrow{\text{mono}}Y$ $\left(Y\xrightarrow{\text{epi}}X\right)$

Oss: $\mathcal{R}$ adatta per $F:\mathcal{A}\to\mathcal{B}$ esatto a sx. Allora

$\forall X\in Ob(\mathcal{A})\ \exists K^\bullet\in Ob(Kom(\mathcal{R}))$ risoluzione dx. per X.

Dim:
$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & X \arrow[r, "\varepsilon", "\text{mono}"'] & K^0 \arrow[rr, dashed, "d_K^0=\beta\circ\alpha"] \arrow[dr, "\alpha"'] & \arrow[d, phantom, "\circlearrowleft"] & K^1 \\
& & 0 \arrow[r] & \operatorname{coker}(\varepsilon) \arrow[ur, "\beta"', "\text{mono}"] \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

ε mono $\Rightarrow X=Ker(\alpha)$

β mono $\Rightarrow Ker(d_K^0)\cong Ker(\alpha)$

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & X \arrow[r] \arrow[d, "\varepsilon"] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r] & K^0 \arrow[r, "d^0"] & K^1 \arrow[r] & K^2 \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

__Definizione__: $F: \mathcal{B} \to \mathcal{C}$ è un'equivalenza di categorie se $\exists G: \mathcal{C} \to \mathcal{B}$ ed esistono due isomorfismi naturali $\varepsilon: F \circ G \to Id_{\mathcal{C}}$ e $\eta: G \circ F \to Id_{\mathcal{B}}$.

__Oss__: $F: \mathcal{B} \to \mathcal{C}$ equivalenza di categorie se e solo se

1) $F: Hom_{\mathcal{B}}(X, Y) \xrightarrow{\cong} Hom_{\mathcal{C}}(F(X), F(Y)) \quad \forall X, Y \in Ob(\mathcal{B})$

2) F è denso: $\forall Z \in Ob(\mathcal{C}) \; \exists X \in Ob(\mathcal{B})$ t.c. $F(X) \cong Z$.

__Prop:__ $F: \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ esatto a sinistra. $\mathcal{R}$ una sottocategoria adatta per F. Allora il morfismo naturale:

$$K^+(\mathcal{R})[S_{\mathcal{R}}^{-1}] \longrightarrow K^+(\mathcal{A})[S_{\mathcal{A}}^{-1}]$$

è un'equivalenza di categorie, dove $S_{\mathcal{R}} \subseteq S_{\mathcal{A}}$ è la classe dei quasi-isomorfismi in $Kom^+(\mathcal{R})$.

__Dim__: G.-M. prop. III.6.4.

Funtore derivato destro.

$F: \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ esatto a sinistra. $\mathcal{R}$ adatta per F.

$$\tilde{F}: Kom^+(\mathcal{R}) \longrightarrow Kom^+(\mathcal{B}) \qquad A^\bullet \longmapsto \tilde{F}(A^\bullet) = \{\tilde{F}(A^\bullet)^i = F(A^i)\}$$

$$K_F^+: K^+(\mathcal{R}) \longrightarrow K^+(\mathcal{B}) \qquad A^\bullet \longmapsto \tilde{F}(A^\bullet)$$

Oss F additivo $\Rightarrow$ K_F^+ ben definito ($\tilde{F}$ manda morfismi omotopi in morf. omotopi)

Oss $f: A^\bullet \to B^\bullet$ quasi-isomorfismo in $Kom^+(\mathcal{R})$

$\Rightarrow C(f) \in Ob(Kom^+(\mathcal{R}))$ aciclico

$\Rightarrow \tilde{F}(C(f)) \cong C(\tilde{F}(f))$ aciclico in $Kom^+(\mathcal{B})$

$\Rightarrow \tilde{F}(f)$ quasi-isomorfismo in $Kom^+(\mathcal{B})$

Oss K_F^+ manda q.-iso. in q.-iso. Dunque induce

$$\begin{tikzcd}
K^+(\mathcal{R})[S_{\mathcal{R}}^{-1}] \arrow[r, "\bar{F}"] \arrow[d, shift left, "\varphi"] & K^+(\mathcal{B})[S_{\mathcal{B}}^{-1}] = D^+(\mathcal{B}) \\
K^+(\mathcal{A})[S_{\mathcal{A}}^{-1}] = D^+(\mathcal{A}) \arrow[u, dashed, shift left, "\exists\psi"] \arrow[ur, dashed, "RF = \bar{F}\circ\psi"'] &
\end{tikzcd}$$

Oss A priori RF dipende da $\mathcal{R}$ e da ψ.

Thm: $F: \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ esatto a sinistra. Se esiste una sottocategoria adatta per F, allora RF è unico (a meno di isomorfismo).

Dim (idea) Si mostra che RF gode della seguente proprietà universale: $\exists \varepsilon_F: Q_B \circ K_F^+ \to RF \circ Q_A$ t.c.

$$\begin{tikzcd}
 & D^+(\mathcal{A}) \arrow[rr, dashed, "RF"] \arrow[rr, bend left, "G"] & & D^+(\mathcal{B}) \\
K^+(\mathcal{A}) \arrow[ur, "Q_A"] \arrow[rr, "K_F^+"'] & & K^+(\mathcal{B}) \arrow[ur, "Q_B"'] &
\end{tikzcd}$$

$\forall G: D^+(\mathcal{A}) \to D^+(\mathcal{B})$

$\varepsilon_G: Q_B \circ K_F^+ \to G \circ Q_A$

$\Rightarrow \exists! \, \eta: RF \to G$

tale che: $\varepsilon_G = (\eta \circ Q_A) \cdot \varepsilon_F$ (il lemma è alla fine)

Thm: $\mathcal{A}$ abeliana con abbastanza iniettivi. Allora la classe $\mathcal{I}$ è adatta per ogni funtore esatto a sinistra.

Dim: Mostro che F manda complessi aciclici in $Kom^+(\mathcal{I})$ in complessi aciclici. Sia $I^\bullet \in Kom^+(\mathcal{I})$ aciclico. $\Rightarrow 0: I^\bullet \to I^\bullet$ è un

quasi-isomorfismo. Dal lemma è anche omotopo all'identità.
Pertanto $0 : F(I^\bullet) \to F(I^\bullet)$ è omotopo a $Id_{F(I^\bullet)} \Rightarrow F(I^\bullet)$ è aciclico.

<u>Def</u>: $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ esatto a sinistra. Se esiste RF, poniamo $\forall i \in \mathbb{Z}$
$$R^i F := H^i \circ RF : D^+(\mathcal{A}) \to \mathcal{B}$$
i-esimo funtore derivato destro di F. funtori derivati classici

<u>Prop</u>: $s : I^\bullet \to K^\bullet$ quasi-isomorfismo da $K^+(\mathcal{I})$ in $K^+(\mathcal{A})$. Allora $\exists t : K^\bullet \to I^\bullet$ tale che $t \circ s \simeq Id_{I^\bullet}$

<u>Dim</u>: $I^\bullet \xrightarrow{s} K^\bullet \xrightarrow{(0,id)} C(s) \xrightarrow{\pi_1} I^\bullet[1]$

s q.-iso. $\Rightarrow C(s)$ aciclico. Dal lemma $\pi_1 \simeq Id_{I[1]}$.

$$\begin{tikzcd}
\arrow[r] & I^{i-1} \oplus K^{i-2} \arrow[r] \arrow[d, "id_I + 0_K"'] & I^i \oplus K^{i-1} \arrow[r, "(-d_I^i,\, s^i + d_K^i)"] \arrow[d, "id_I + 0_K"] \arrow[dl, "f^{i-1}+t^{i-1}"'] & I^{i+1} \oplus K^i \arrow[r] \arrow[d, "id_I + 0_K"] \arrow[dl, "f^i + t^i"'] & {} \\
\arrow[r] & I^{i-1} \arrow[r, "-d_I^{i-1}"] & I^i \arrow[r, "-d_I^i"'] & I^{i+1} \arrow[r] & {}
\end{tikzcd}$$

$$\pi_1 = id_{I[1]} + 0_{K^\bullet} = \left[-d_I f - f d_I + ts\right] + \left[-d_I t + t d_K\right] =$$
$$= (d_{I[1]} f + f d_{I[1]} + ts) + (-d_I t + t d_K)$$

$\Rightarrow ts \simeq id_I$ e t morfismo di complessi.

<u>Cor</u>: $I^\bullet \in Ob(Kom^+(\mathcal{I}))$. Allora: $Hom_{K(\mathcal{A})}(X^\bullet, I^\bullet) \cong Hom_{D(\mathcal{A})}(X^\bullet, I^\bullet)$.

<u>Dim</u>: L'isomorfismo è dato da: $(X^\bullet \to I^\bullet) \longmapsto \left(X^\bullet \xleftarrow{Id} X^\bullet \to I^\bullet\right)$

Verifichiamo la suriettività:

$$\begin{tikzcd}
& W^\bullet \arrow[dl, "s \circ r"'] \arrow[dr, "f"] & \\
X^\bullet \arrow[dr, dashed, "g"'] & ? & I^\bullet \arrow[dl, dashed, "s \in S"] \\
& Y^\bullet &
\end{tikzcd}
\Rightarrow \exists t : Y^\bullet \to I^\bullet \text{ t.c. } t \circ s \simeq id_{I^\bullet} \Rightarrow t \circ g \longmapsto \left(X^\bullet \xleftarrow{r} W^\bullet \xrightarrow{f} I^\bullet\right)$$

<u>Oss</u>: $\mathcal{A}$ categoria abeliana con abbastanza iniettivi. $X \in Ob(\mathcal{A})$
$Hom(X, -) : \mathcal{A} \to Ab$ (= gruppi abeliani)
è un funtore esatto a sinistra.

<u>Esempio:</u> $\mathcal{A}$ abeliana con abbastanza iniettivi. $X \in Ob(\mathcal{A})$.

$\mathcal{R} = \mathcal{I}$ adatta per $Hom_{\mathcal{A}}(X,-)$. Chi è $RHom_{\mathcal{A}}(X,-)$?

$$\begin{tikzcd} K^+(\mathcal{I})[S_{\mathcal{I}}^{-1}] \arrow[r, "\overline{Hom(X,-)}"] \arrow[d] & D^+(Ab) \\ K^+(\mathcal{A})[S_{\mathcal{A}}^{-1}] = D^+(\mathcal{A}) \arrow[u, dashed, bend left, "\psi"] \arrow[ur, "RHom_{\mathcal{A}}(X,-)"'] & \end{tikzcd}$$

$Y^\bullet \in Ob(D^+(\mathcal{A})) \rightsquigarrow \psi(Y^\bullet) = I_Y^\bullet \in Ob(K^+(\mathcal{I})[S_{\mathcal{I}}^{-1}])$

$\rightsquigarrow \overline{Hom_{\mathcal{A}}}(X, I_Y^\bullet) = Hom_{\mathcal{A}}(X, I_Y^\bullet)$

$\Rightarrow R^i Hom_{\mathcal{A}}(X, Y^\bullet) = H^i(RHom_{\mathcal{A}}(X, Y^\bullet)) = H^i(Hom_{\mathcal{A}}(X, I^\bullet)) \in Ab$

<u>Oss:</u> Abbiamo definito $R^i Hom_{\mathcal{A}}(X,-)$ su $D^+(\mathcal{A})$. Se $Z \in \mathcal{A}$ prendo $Y^\bullet = Z[0]$, allora $R^i Hom_{\mathcal{A}}(X, Z[0]) = H^i(Hom_{\mathcal{A}}(X, I_Z^\bullet)) =: Ext^i_{\mathcal{A}}(X, Z)$.

<u>Thm:</u> $\mathcal{A}$ abeliana con abbastanza iniettivi. $X, Y \in Ob(\mathcal{A})$. Allora:

$Ext^i_{\mathcal{A}}(X,Y) := H^i(Hom_{\mathcal{A}}(X, I_Y^\bullet)) \cong Hom_{D(\mathcal{A})}(X[0], Y[i])$

<u>Dim:</u> $Hom_{D(\mathcal{A})}(X[0], Y[i]) \cong Hom_{D(\mathcal{A})}(X[0], I_Y^\bullet[i]) \cong [\text{Prop.}] \cong$

$\cong Hom_{K(\mathcal{A})}(X[0], I_Y^\bullet[i]) \cong H^i(Hom_{\mathcal{A}}(X, I_Y^\bullet))$

$$\begin{tikzcd} \cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dl] & \cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & X \arrow[r] \arrow[d, "f"] \arrow[dl, "h"'] & 0 \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dl] & \cdots & X[0] \arrow[d, "f"] \\ \cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r] & I^0 \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & I^{i-1} \arrow[r] & I^i \arrow[r] & I^{i+1} \arrow[r] & \cdots & I_Y^\bullet[i] \end{tikzcd}$$

f morfismo di complessi $\Leftrightarrow f \in Z^i(Hom_{\mathcal{A}}(X, I_Y^\bullet))$

$f \simeq 0 \Leftrightarrow f \in B^i(Hom_{\mathcal{A}}(X, I_Y^\bullet))$.

Lemma: $C^\bullet \in Ob(Kom(\mathcal{A}))$, $I^\bullet \in Ob(Kom^+(\mathcal{I}))$, $f: C^\bullet \to I^\bullet$ morfismo di complessi. Allora, se $H^*(C^\bullet)=0$, $f \simeq 0$.

Dim:

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & C^{-1} \arrow[r] \arrow[d] & C^0 \arrow[r] \arrow[d, "f^0"] \arrow[dl, "0"'] & C^1 \arrow[r] \arrow[d, "f^1"] \arrow[dl, "k^1"'] & C^2 \arrow[r] \arrow[d, "f^2"] \arrow[dl, "k^2"'] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r] & I^0 \arrow[r] & I^1 \arrow[r] & I^2 \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Per induzione, costruisco k^{n+1} conoscendo la $k^n: C^{n+1} \to I^n$.

$$\begin{tikzcd}
 & C^n \arrow[r, "d_C^n"] \arrow[d, "f^n"] \arrow[dl, "k^{n-1}"'] & C^{n+1} \arrow[r, "d_C^{n+1}"] \arrow[d, "f^{n+1}"] \arrow[dl, "k^n"'] & C^{n+2} \\
I^{n-1} \arrow[r, "d_I^{n-1}"'] & I^n \arrow[r, "d_I^n"'] & I^{n+1}
\end{tikzcd}$$

$$f^{n+1} \circ d_C^n = d_I^n \circ f^n = d_I^n \circ (k^n \circ d_C^n + d_I^{n-1} \circ k^{n-1}) = (d_I^n \circ k^n) \circ d_C^n$$

$$\Rightarrow (f^{n+1} - d_I^n \circ k^n) \circ d_C^n = 0.$$

$$\begin{tikzcd}
C^n \arrow[r, "d_C^n"] & C^{n+1} \arrow[rr, "d_C^{n+1}"] \arrow[dr] \arrow[dd, "f^{n+1} - d_I^n k^n"'] & & C^{n+2} \arrow[ddll, bend left, "k^{n+1}"] \\
 & & \operatorname{coker}(d_C^n) \arrow[ur, dashed, "\text{mono}"'] \arrow[dl, dashed] & \\
 & I^{n+1} & &
\end{tikzcd}$$

$H^*(C^\bullet)=0$

Esiste poiché I^{n+1} iniettivo.