Oss: Nell' ultimo incontro abbiamo costruito il funtore derivato destro $RF: D^+(\mathcal{A}) \longrightarrow D^+(\mathcal{B})$ a partire da un funtore esatto a sinistra $F: \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$.

Def: $\mathcal{A}$ abeliana. $\mathcal{B} = Kom^{\pm}(\mathcal{A}), D^{\pm}(\mathcal{A}), K^{\pm}(\mathcal{A})$.

Un triangolo in $\mathcal{B}$ è un diagramma della forma

$$K^\bullet \xrightarrow{u} L^\bullet \xrightarrow{v} M^\bullet \xrightarrow{w} K^\bullet[1]$$

Un morfismo di triangoli è un diagramma commutativo della forma

$$\begin{tikzcd}
K^\bullet \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & L^\bullet \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & M^\bullet \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & K^\bullet[1] \arrow[d] \\
K_1^\bullet \arrow[r] & L_1^\bullet \arrow[r] & M_1^\bullet \arrow[r] & K_1^\bullet[1]
\end{tikzcd}$$

È un isomorfismo se le frecce verticali sono isomorfismi.

Un triangolo in $\mathcal{B}$ si dice distinto se esiste un morfismo di complessi $f: K^\bullet \longrightarrow L^\bullet$ tale che

$$\begin{tikzcd}
K^\bullet \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & L^\bullet \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & M^\bullet \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & K^\bullet[1] \arrow[d, "\cong"] \\
K^\bullet \arrow[r, "i_1"'] & Cyl(f) \arrow[r, "\pi_{2,3}"'] & C(f) \arrow[r, "\pi_1"'] & K^\bullet[1]
\end{tikzcd}$$

isomorfismi in $\mathcal{B}$

Prop: Sia $0 \longrightarrow K^\bullet \xrightarrow{f} L^\bullet \xrightarrow{g} M^\bullet \longrightarrow 0$ esatta in $Kom(\mathcal{A})$.

Allora è quasi-isomorfa alla successione esatta

$$0 \longrightarrow K^\bullet \xrightarrow{i_1} Cyl(f) \xrightarrow{\pi_{2,3}} C(f) \longrightarrow 0$$

Dim:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & K^\bullet \arrow[r, "f"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & L^\bullet \arrow[r, "g"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & M^\bullet \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & K^\bullet \arrow[r] \arrow[u, "id"] & Cyl(f) \arrow[r] \arrow[u, "\beta"] & C(f) \arrow[r] \arrow[u, "\gamma"] & 0
\end{tikzcd}$$

$\beta = f + id_{L^\bullet}$ è un quasi-iso. come visto nella prima lezione.

$\gamma = 0_{K^\bullet[1]} + g$ è suriettiva (poiché g lo è) e dunque abbiamo l'esatta $0 \longrightarrow Ker(\gamma) \longrightarrow C(f) \longrightarrow M^\bullet \longrightarrow 0$

$Ker(\gamma) = K^\bullet[1] \oplus Ker(g) = K^\bullet[1] \oplus Im(f)$. Si mostra che $K^\bullet[1] \oplus Im(f)$ è aciclico in quanto l'identità è omotopa a zero $\Rightarrow H^*(Ker(\gamma)) = 0 \Rightarrow \gamma$ è un quasi-isomorfismo.

thm: $K^\bullet \xrightarrow{u} L^\bullet \xrightarrow{v} M^\bullet \xrightarrow{w} K^\bullet[1]$ distinto in $D(\mathcal{A})$. Allora

$$\cdots \to H^i(K^\bullet) \longrightarrow H^i(L^\bullet) \longrightarrow H^i(M^\bullet) \longrightarrow H^i(K^\bullet[1]) = H^{i+1}(K^\bullet) \to \cdots$$

è esatta in $\mathcal{A}$.

Dim: $K^\bullet \xrightarrow{i_1} Cyl(u) \xrightarrow{\pi_{2,3}} C(u) \xrightarrow{\pi_1} K^\bullet[1]$. (è il mio triangolo a meno di isomorfismi in $D(\mathcal{A})$). Allora:

$$\cdots \to H^i(K^\bullet) \to H^i(Cyl(u)) \to H^i(C(u)) \xrightarrow{\delta} H^{i+1}(K^\bullet) \longrightarrow \cdots$$

è esatta in $\mathcal{A}$ [è la lunga in coomologia dell'esatta corta $0 \to K^\bullet \to Cyl(u) \to C(u) \to 0$]

L'unica cosa da verificare è che $\delta = H^i(\pi_1)$

[si verifica a mano, ricordando la definizione di δ].

Oss: Dalla proposizione ho che tutte le succ. esatte in $Kom(\mathcal{A})$ sono isomorfe in $D(\mathcal{A})$ ad una della forma $0 \to K^\bullet \to Cyl(u) \to C(u) \to 0$ e dunque si "completano" ad un triangolo distinto [ho la proiezione naturale $\pi_1 : C(u) \to K^\bullet[1]$]. Il teorema mostra invece come alcune proprietà coomologiche delle succ. esatte in $Kom(\mathcal{A})$ vengano "ereditate" dai triangoli distinti in $D(\mathcal{A})$. L'idea è dunque sostituire la nozione di funtore esatto (che fra categorie derivate non ha senso poiché non abeliane).

Def: $\mathcal{A}, \mathcal{C}$ categorie abeliane. Un funtore $G : D^+(\mathcal{A}) \to D^+(\mathcal{C})$ si dice esatto se manda triangoli in triangoli e manda triangoli distinti in triangoli distinti.

thm: $F : \mathcal{A} \to \mathcal{C}$ esatto a sinistra. $\mathcal{R}$ classe adatta per F [ad esempio "$\mathcal{R}$ = classe degli iniettivi" se $\mathcal{A}$ ha abbastanza iniettivi]. Allora RF è esatto (nel senso della definizione precedente).

Dim: Ricordiamo che avevamo definito RF come segue:

$$\begin{tikzcd}
K^+(\mathcal{R})[S_{\mathcal{R}}^{-1}] \arrow[rr, "\overline{F}"] \arrow[d, shift left, "\phi"] & & K^+(\mathcal{B})[S_{\mathcal{B}}^{-1}] \arrow[d, phantom, "\shortparallel"] \\
K^+(\mathcal{A})[S_{\mathcal{A}}^{-1}] = D^+(\mathcal{A}) \arrow[u, shift left, dotted, "\psi"] \arrow[rr, "RF = \overline{F}\circ\psi"'] \arrow[ur, phantom, "\circlearrowright"] & & D^+(\mathcal{B})
\end{tikzcd}$$

dove $\overline{F}$ agisce componente per componente, mentre ϕ è l'embedding naturale e ψ il suo quasi-inverso (ovvero il funtore che rende ϕ un'equivalenza di categorie).

Ora, dal momento che $\overline{F}$ agisce grado per grado preserva triangoli e triangoli distinti ($\overline{F}$ commuta in particolare con lo shift). ψ commuta con lo shift e dunque manda triangoli in triangoli. Per concludere mostreremo che:

"dato un triangolo $\Delta: X \xrightarrow{f} Y \to Z \to X[1]$ in $K^+(\mathcal{R})[S_{\mathcal{R}}^{-1}]$ (non necessariamente distinto) che sia distinto quando considerato in $D^+(\mathcal{A})$, allora Δ è isomorfo in $D^+(\mathcal{A})$ ad un triangolo distinto di $K^+(\mathcal{R})[S_{\mathcal{R}}^{-1}]$."

Il morfismo $f: X \to Y$ può essere rappresentato da un tetto

$$\begin{tikzcd}
& T \arrow[dl, "q"'] \arrow[dr, "r"] & \\
X & & Y
\end{tikzcd}$$

con $T \in \mathrm{Kom}^+(\mathcal{R})$, $q \in S_{\mathcal{R}}$.

Mostriamo che Δ è isomorfo in $D^+(\mathcal{A})$! al triangolo

$T \xrightarrow{r} Y \xrightarrow{i_2} C(r) \xrightarrow{\pi_1} T[1]$ (è un triangolo distinto poiché Y è quasi-isomorfo a $Cyl(r)$ come visto nella prima lezione!). Abbiamo il diagramma commutativo:

$$\begin{tikzcd}
T \arrow[r, "r"] \arrow[d, "q"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & Y \arrow[r] \arrow[d, "id"] & C(r) \arrow[r] & T[1] \arrow[d, "q[1]"] \\
X \arrow[r, "f"'] & Y \arrow[r] & Z \arrow[r] & X[1]
\end{tikzcd}$$

Essendo quello in basso un triangolo distinto in $D^+(\mathcal{A})$, sarà isomorfo a $X \to Cyl(f) \to C(f) \to X[1]$ e, pertanto, anche al triangolo $X \xrightarrow{f} Y \longrightarrow C(f) \longrightarrow X[1]$

Per concludere basterà mostrare che esiste un isomorfismo in $D^+(\mathcal{A})$ da $C(r)$ a $C(f)$ che faccia commutare:

$$\begin{tikzcd}
T \arrow[r, "r"] \arrow[d, "q"'] & Y \arrow[r] \arrow[d, "id"'] & C(r) \arrow[r] \arrow[d, dashed, "\varphi"] & T[1] \arrow[d, "q[1]"] \\
X \arrow[r, "f"] & Y \arrow[r] & C(f) \arrow[r] & X[1]
\end{tikzcd}$$

Basta porre $\varphi = (q[1], id) : C(r) = T[1] \oplus Y \longrightarrow X[1] \oplus Y = C(f)$.

<u>Oss</u>: (<u>Successione esatta lunga degli Ext</u>).

Sia $0 \longrightarrow Y' \xrightarrow{\alpha} Y \xrightarrow{\beta} Y'' \longrightarrow 0$ una successione esatta in una categoria abeliana $\mathcal{A}$ con abbastanza iniettivi. Consideriamo il funtore $F = Hom_{\mathcal{A}}(X,-) : \mathcal{A} \longrightarrow Ab$ (= gruppi abeliani) dove $X \in Ob(\mathcal{A})$ è un oggetto fissato. Nella scorsa lezione abbiamo costruito il derivato destro

$RHom_{\mathcal{A}}(X,-) : D^+(\mathcal{A}) \longrightarrow D^+(Ab)$

e abbiamo mostrato che $R^i Hom_{\mathcal{A}}(X,-) : \underset{\mathcal{A}}{\underset{\cap}{Z}} \longmapsto \underset{Ab}{\underset{\cap}{Ext^i_{\mathcal{A}}(X,Z)}}$

Ora, dalla proposizione segue che una successione esatta è isomorfa (se vista in $D^+(\mathcal{A})$) alla successione

$0 \longrightarrow Y' \longrightarrow Cyl(\alpha) \longrightarrow C(\alpha) \longrightarrow 0$ e può dunque essere "completata" ad un triangolo distinto. Dal ma appena dimostrato segue allora che $RHom_{\mathcal{A}}(X,-)$ porta il triangolo $Y' \longrightarrow Y \longrightarrow Y'' \longrightarrow Y'[1]$ (distinto in $D^+(\mathcal{A})$) in un triangolo distinto in $D^+(Ab)$:

$$RHom_{\mathcal{A}}(X, Y') \longrightarrow RHom_{\mathcal{A}}(X, Y) \longrightarrow RHom_{\mathcal{A}}(Y'') \longrightarrow RHom_{\mathcal{A}}(X, Y')[1]$$

Pertanto, prendendone la coomologia otteniamo l'esatta lunga che segue:

$$\begin{array}{ccccccccc}
\cdots \to H^i(R\mathcal{H}om_A(X,Y')) & \to & H^i(R\mathcal{H}om_A(X,Y)) & \to & H^i(R\mathcal{H}om_A(X,Y'')) & \to & H^{i+1}(R\mathcal{H}om_A(X,Y')) \to \cdots \\
\| & & \| & & \| & & \| \\
\cdots \to R^i\mathcal{H}om_A(X,Y') & \to & R^i\mathcal{H}om_A(X,Y) & \to & R^i\mathcal{H}om_A(X,Y'') & \to & R^{i+1}\mathcal{H}om_A(X,Y') \to \cdots \\
\| & & \| & & \| & & \| \\
\cdots \to \mathcal{E}xt^i_A(X,Y') & \to & \mathcal{E}xt^i_A(X,Y) & \to & \mathcal{E}xt^i(X,Y'') & \to & \mathcal{E}xt^{i+1}_A(X,Y') \to \cdots
\end{array}$$

Ritrovando così la successione esatta lunga degli Ext.

N.B. La seconda parte della lezione si può trovare su:
A. Caldararu: "Derived categories of sheaves: a skimming" (Lecture 3).